S2_APPLI_COURS_ : Linéarité - CORRIGE

MOYENNE, VARIANCE (V(x) ou σ^2) ET ECART TYPE ((V(x))^{1/2} ou σ)

Changement de variable

A l'aide d'une distribution de salaires (donnée ci-dessous) en 4 classes, on se propose de réduire la variable par un changement de variable. Les calculs de la moyenne, de la variance et de l'écart type, seront donc réalisés à l'aide la propriété de linéarité appliquée à chacun de ces indicateurs.

Soit cette distribution et le tableau dont les libellés de colonne sont donnés (l'ordre des calculs peut cependant être modifié) :

Il est demandé

- 1) de réaliser les calculs de : la moyenne, de la variance et de l'écart type de la variable intermédiaire (ou nouvelle variable), sachant que le changement de variable s'écrit :

$$cx'_i = \frac{cx_i - 6375}{10} \quad (\text{ou si on préfère alléger la formalisation } x'_i = \frac{x_i - 6375}{10})$$

- 2) de vérifier la propriété de linéarité par le calcul dans le tableau, en donnant la relation vérifiée (sous le tableau).

(calculs au centième)

-JO-

En jaune : les calculs pour la variable auxiliaire – En orange les calculs pour la variable initiale.

xi-	xi+	ni	cx _i	cx' _i	fi	fi.cxi'	(cxi') ²	fi.cxi ²	fi.cxi	cx _i ²	fi.cxi ²
4400	5400	1271	4900	-147,5	0,47	-69,15	21756,25	10200	2297,27	24010000	11256624,9
5400	7350	847	6375	0	0,31	0,00	0	0	1991,75	40640625	12697384,5
7350	10400	296	8875	250	0,11	27,30	62500	6824,05	969,02	78765625	8600009,22
10400	15450	297	12925	655	0,11	71,76	429025	47001,26	1415,98	167055625	18301556,9
		2711			1,00	29,90		64025,31	6674,01		50855575,4

Sachant que la transformation linéaire s'écrit $cx'_i = \frac{cx_i - 6375}{10}$ (en jaune)

avec $(cx_i = \frac{1}{2} \cdot (xi^+ + xi^-))$ (en orange)

Les caractéristiques de la variable auxiliaire s'écrivent :

La moyenne :
$$\bar{x}' = \sum fi \cdot (cxi)' = 29,90$$

La variance :
$$V(x)' = \sigma^2(x)' = \sum_i f_i \cdot (cxi)^2 - (\bar{x})^2$$

$$= 64025,31 - (29,90)^2 = 63131,22$$

L'écart type :
$$(V(x)')^{1/2} = \sigma(x)' = \sqrt{63131,22} = 251,259$$

La propriété de linéarité permet de retrouver les caractéristiques de la variable d'origine par les transformations suivantes appliquée aux caractéristiques de la variable intermédiaire:

La moyenne :
$$\bar{x} = \sum_i f_i \cdot (cxi) = (10 \cdot \bar{x}') + 6375 = (10 \times 29,90) + 6375$$

$$= 299 + 6375 = 6674$$

Ce résultat est en outre vérifié en orange.

La variance :
$$V(x) = \sigma^2(x) = \sum_i f_i \cdot (cxi)^2 - (\bar{x})^2$$

$$= (10 \times 10) \cdot 63131,22 = 63131,22$$

Ce résultat est en outre vérifié en orange.

L'écart type :
$$V(x)^{1/2} = \sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$$

$$= 10 \times 251,259 = 2512,59$$

Ce résultat est en outre vérifié en orange.

-FO-

Conclusion : la variable auxiliaire permet, en simplifiant les calculs, d'obtenir plus rapidement, en limitant les risques d'erreurs, celles de la variable d'origine.

La vérification en orange n'est donc pas nécessaire et sert ici seulement à la démonstration.

-FO-