APPLI_COURS_ : CORRIGE CARACTERISTIQUES DE CONCENTRATION
Indice de Gini et courbe de Lorenz Gini

Soit une distribution de salaires (prime comprise) en Euro, dans une entreprise, dont on connaît les effectifs salariés au cours d'une période.
On suppose, dans un premier temps inconnue la masse salariale (comprenant la prime) distribuée. C'est le tableau 1.
Puis dans un second temps (en fin de période), cette masse (**MS**) et **sa répartition réelle** (**Si**) sont connues (en K€). C'est le tableau 2.

Travail demandé

1) Evaluer dans chaque cas, à l'aide de l'indice de Gini, la concentration, pour dresser un constat sur les *inégalités de répartition.*
   Dans chaque tableau, on évaluera l'indice de Gini à l'aide des deux raisonnements : dans le triangle (IG = 2(0,5-U)), et dans le carré (IG = 1 –A). Les libellés des colonnes sont donnés à cet effet.

2) Déterminer pour chaque situation : la Médiane, et la Médiale. Calculer l'intervalle de variation (ΔM). Illustrer ces trois valeurs avec les deux courbes cumulatives F(xi-) et G(xi-) réalisées dans le même graphique. Vérifier la concentration constatée en 1) ci-dessus.

3) Réaliser les deux courbes de Lorenz Gini dans le même carré, et vérifier la concentration constatée en 1) ci-dessus.

4) Conclure en une phrase sur la différence entre les deux distributions : tableau et courbes des cas 1) 2).

_Σ_

Tableau 1 : Masse et répartition estimées
(NB : le tableau est à utiliser pour répondre aux trois questions)

											dans le triangle	dans le carré
xi-	xi+	ni	fi%	cxi	fi*.cxi	F(xi-)	F(xi+)	gi	G(xi-)	G(xi+)	1/2.fi((Gxi-)+G(xi+))	fi((Gxi-)+G(xi+))
1500	1700	180	54,5%	1600	872,73	0	0,55	0,510	0	0,510	0,139	0,278
1700	1800	75	22,7%	1750	397,73	0,55	0,77	0,232	0,510	0,742	0,142	0,285
1800	1950	26	7,9%	1875	147,73	0,77	0,85	0,086	0,742	0,828	0,062	0,124
1950	2005	49	14,8%	1977,5	293,63	0,85	1,00	0,172	0,828	1,000	0,136	0,271
		330	100,0%		1711,81	1,00		1,000	1,000		0,479	0,958

1) Calcul de IG (ci-dessus)

NB : gi estimé = (fi.cxi)/xbar

Donc, dans le triangle :	IG = 2*(0,5-0,48) = 2*0,02=0,04
ou dans le carré :	IG = 1-A= 1 - 0,996 **soit 0,04**
	Donc 2×0,02= 0,04 soit le double de C, l'aire de concentration

2) Médiane et Médiale

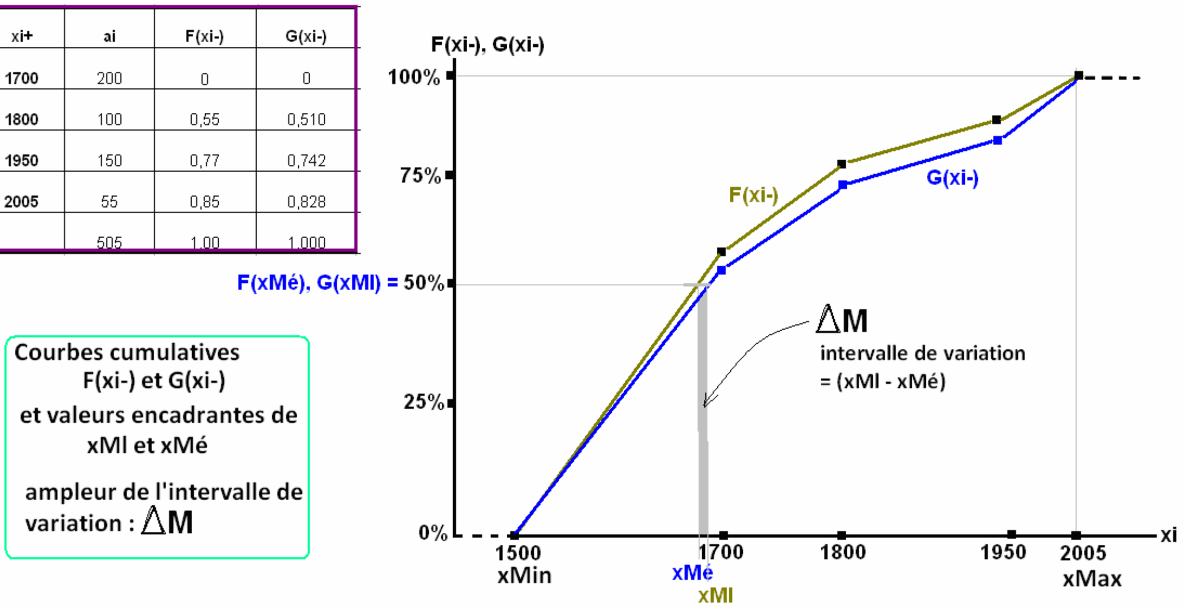
Toutes deux sont déterminées par interpolation linéaire : xMé au moyen des F(xi-) et F(xi+) et xMl au moyen des G(xi-) et G(xi+).
La médiane : les bornes encadrantes sont : 0 et o,55 pour xi- = 1500 et xi+ = 1700. D'où xMé = 1500 + (1700-1500) ((0,5 – 0 / 0.55 – 0) = 1500 + 200 (0.5/0.55) = **1681,8**

La Médiale : les bornes encadrantes sont : 0 et 0,510 pour xi- = 1500 et xi+ = 1700. D'où xMl = 1500 + 200(0,5 / 0.509) = 1500 + 200(0,98) = 1500+196 = **1696**.
(NB 0,509 est la valeur du premier G(xi-) arrondi dans le tableau à 0.51)

Le constat normal est : xMl > xMé soit 1696 > 1681,8
L'intervalle de variation ΔM est donc très faible :
L'écart Médiale – Médiane = 1696 – 1681,8 = 14,2
Rapporté à l'étendue il devient « intervalle de variation » = 14,2 / (2005 – 1500)
= 14,2/505 = 0,028 soit 2,8%. Ce qui signifie que la concentration est quasiment nulle.
Ce qui confirme le faible indice de Gini : IG = 0,04, soit 4% ci-dessus.

Les courbes cumulatives F(xi-) et G(xi-) doivent confirmer ce résultat. Ce qui est le cas :

xi-	xi+	ai	F(xi-)	G(xi-)
1500	1700	200	0	0
1700	1800	100	0,55	0,510
1800	1950	150	0,77	0,742
1950	2005	55	0,85	0,828
		505	1,00	1,000



3) La concentration et la courbe de Lorenz Gini
(NB : La courbe en vert est celle du tableau 2, et vient s'y ajouter à la suite du traitement suivant)

Tableau 1 : masse estimée

xi-	xi+	F(xi-)	G(xi-)
1500	1700	0	0
1700	1800	0,55	0,510
1800	1950	0,77	0,742
1950	2005	0,85	0,828
		1,00	1,000

Tableau 2 : masse réelle

xi-	xi+	F(xi-)	G(xi-)
1500	1700	0,0%	0
1700	1800	54,5%	0,109
1800	1950	77,3%	0,406
1950	2005	85,2%	0,604
		100,0%	1,000

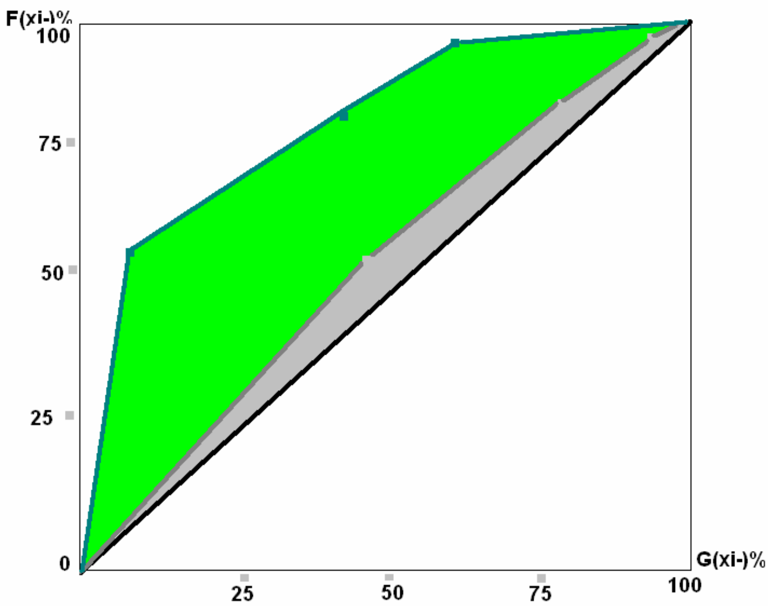


Tableau 2 : Masse et répartition réelles

(NB : le tableau est à utiliser pour répondre aux trois questions)

xi-	xi+	ni	Si	fi%	cxi	fi*.cxi	F(xi-)	F(xi+)	gi	G(xi-)	G(xi+)	dans le triangle 1/2.fi((Gxi-)+G(xi+))	dans le carré fi((Gxi-)+G(xi+))
1500	1700	180	55	54,5%	1600	872,73	0,0%	54,5%	0,109	0	0,109	0,030	0,059
1700	1800	75	150	22,7%	1750	397,73	54,5%	77,3%	0,297	0,109	0,406	0,059	0,117
1800	1950	26	100	7,9%	1875	147,73	77,3%	85,2%	0,198	0,406	0,604	0,040	0,080
1950	2005	49	200	14,8%	1977,5	293,63	85,2%	100,0%	0,396	0,604	1,000	0,119	0,238
		330	505	100,0%		1711,81	100,0%		1,000	1,000		0,247	0,494

NB : gi réel est ici le quotient : (Si/MS) avec $MS = \sum_i S_i$

1) Calcul de IG (ci-dessus)

Donc, dans le triangle :	IG = 2*(0,5-0,25) = 2*0,25=0,5
ou dans le carré :	IG = 1-A= 1 - 0,5 **soit 0,5**
	Donc 2×0,25=0,5 soit le double de C, l'aire de concentration

2) Médiane et Médiale

Toutes deux sont déterminées par interpolation linéaire : xMé au moyen des F(xi-) et F(xi+) et xMl au moyen des G(xi-) et G(xi+).

La médiane : Elle est normalement la même soit xMé = **<u>1681,8.</u>** Mais du fait de la différence d'arrondis, on peut la recalculer. Soit :

les bornes encadrantes sont : 0 et o,545 pour xi- = 1500 et xi+ = 1700. D'où

xMé = 1500 + (1700-1500) ((0,5 – 0 / 0.545 – 0) = 1500 + 200 (0,917) = **<u>1683,4 ≈ 1681,8</u>**

La Médiale : les bornes encadrantes sont : 0,406 et 0,604 pour xi- = 1800 et xi+ = 1950. D'où

xMl = 1800 + 150(0,5-0,406 / 0,604 – 0,406) = 1800 + 150 (0,198) = **<u>1829,7</u>**

Le constat normal est : xMl > xMé soit 1829,7 > 1683,4

L'intervalle de variation ΔM est donc important :

L'écart Médiale – Médiane = 1829,7 – 1683,4 = 146,3

Rapporté à l'étendue il devient « intervalle de variation » = 146,3 / (2005 – 1500)

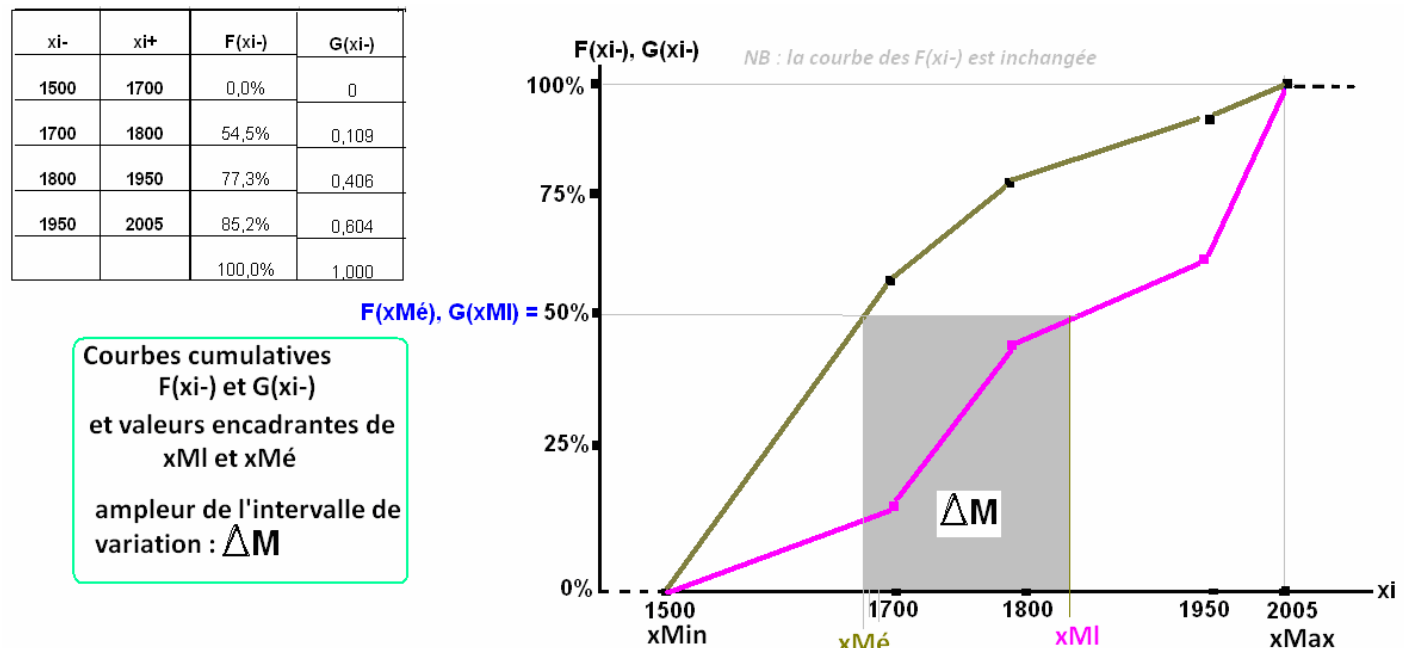
= 146,3/505 = 0,29 soit 29 %. Ce qui signifie que la concentration est importante.

Ce qui confirme le niveau élevé de l' indice de Gini : IG = 0,5 soit 50 % ci-dessus.

Les courbes cumulatives F(xi-) et G(xi-) doivent confirmer ce résultat, par l'ampleur de l'intervalle de variation. Ce qui est le cas :

Voir ci-dessous

3) voir courbe de Gini plus haut (en vert).



xi-	xi+	F(xi-)	G(xi-)
1500	1700	0,0%	0
1700	1800	54,5%	0,109
1800	1950	77,3%	0,406
1950	2005	85,2%	0,604
		100,0%	1,000

Question 4) conclusion

Quel que soit l'indicateur, ou la courbe, que l'on considère, la répartition est inégalitaire dans le cas réel, tandis qu'elle est proche de l'égalité parfaite dans le cas théorique (c'est la valeur de l'indice de Gini qui traduit le mieux ce phénomène).
