S2_APPLI_COURS_ _: **SUJET**

VARIANCE (V(x) ou σ^2)

Formule développée (ou simplififée), ou moyenne des carrés des écarts $\left(xi - \overline{x}\right)^2$, il faut choisir !

Le tableau de distribution ci-dessous est celui d'une variable continue quelconque, dont on connaît les effectifs *« ni »*,

<u>Il est demandé de calculer la variance de la distribution, pour en déduire l'écart type et le coefficient de variation.</u>

Il est conseillé de vérifier sur cet exemple l'intérêt de la formule simplifiée de la variance. Pour cela le tableau de distribution comporte suffisamment de cellules vierges, vous permettant de réaliser les deux méthodes(moyenne des carrés des écarts, ou formule simplifiée), afin de les comparer, sachant que leur résultat doit être le même. (Voirs cours)

Tableau de distribution

La formule dite DEVELOPPEE ou SIMPLIFIEE de la variance (voir cours) est par définition d'application plus rapide

Elle est celle du THEOREME DE KOENIG : La variance est égale à la moyenne des carrés des écarts, moins le carré de la moyenne.

Sous sa forme la plus simple, cette formule utilise les fréquences fi (décimales) et les centres de classes (cxi) (colonnes 1 à 8). (Par convention cxi peut s'écrire xi).

Soit :

$$V(x) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i . x_i^2 - (\overline{x})^2$$

= somme (col 8) – [somme (col 7)]² = 2282 – (45,6)² = 2282 – 2079,36 = 202,64

col 1	col 2	col 3	col 4	col 5	col 6	col 7	col 8		col 9	col 10	col 11	col 12	col 13		col 14
xi-	xi+	ni	fi	cxi	(cxi)²	ficxi	fi.(cxi)²	ou	ni (cxi)	ni.(cxi)²	(cxi - xbar)	(cxi-xbar)²	ni.(cxi-xbar)²	ou	fi(cxi-xbar)²
15	25	9	0,09	20	400	1,8	36		180	3600	-25,6	655,36	5898,24		58,9824
25	35	15	0,15	30	900	4,5	135		450	13500	-15,6	243,36	3650,4		36,504
35	45	22	0,22	40	1600	8,8	352		880	35200	-5,6	31,36	689,92		6,8992
45	55	29	0,29	50	2500	14,5	725		1450	72500	4,4	19,36	561,44		5,6144
55	65	17	0,17	60	3600	10,2	612		1020	61200	14,4	207,36	3525,12		35,2512
65	75	6	0,06	70	4900	4,2	294		420	29400	24,4	595,36	3572,16		35,7216
75	85	2	0,02	80	6400	1,6	128		160	12800	34,4	1183,36	2366,72		23,6672
		100	1			45,6	2282		4560	228200			20264		202,64

Plutôt qu'en fréquences la formule de Koenig peut aussi être appliquée aux effectifs. Mais c'est plus long.
Soit

$$V((x) = \sigma^2 = [\frac{1}{N}(\sum_i ni.cxi^2)] - \frac{\sum_i (ni.cxi)}{N}$$

= (somme colonne 10/somme colonne3) – (somme colonne 9/somme colonne3)
= [(228200) / 100] – (4560/100)² = 2282 / (45,6)² = 2282 – 2079,6 = 202,64

L'autre formule détaille le calcul des écarts (colonnes 11 à 13 ou 14)

Elle s'écrit de 2 manières : avec les effectifs (à gauche) ou les fréquences (à droite) – sachant que l'expression « xi » peut remplacer « cxi » dans les formules.

$$V(x) \text{ ou } \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

Avec les effectifs (colonnes 11 à 13)
Soit : (somme colonne 13) / (somme colonne 3) = 202,64 / 100 = 202,64

Avec les fréquences (colonne 14)
Soit : somme colonne 14 = 202,64

L'écart type

L'écart type σ = (σ²)$^{1/2}$
= racine carrée de la variance.

=(202,64)$^{1/2}$ = 14,235

Le coefficient de variation

$$CV = \frac{\sigma_{(x)}}{\bar{x}} = [14{,}235\ \ / 45{,}6]\times 100\% = 31{,}22\%$$

-JO-