

Chapitre II

La théorie néo-classique du comportement du producteur ou théorie du producteur (TNC_p)

Introduction : TNC_c et TNC_p : ressemblances et dissemblances

1-L'analyse du comportement du producteur et celle du comportement du consommateur possèdent des points communs et des différences importantes.

11- Quatre points communs

111- La TNC_p poursuit l'objectif de construire **la courbe d'offre** de biens de l'entreprise « *i* », sur le marché du bien où elle exerce. L'offre (qui est un concept) est définie par une quantité » de biens, et exige pour être réalisée *une demande de « consommation productive »* sous forme de « *facteurs de production* ». L'entreprise est donc aussi un « **demandeur de facteurs de production** ». Ce qui est conforme à l'objectif de la TNC qui était de construire la fonction de demande de tous les consommateurs, et la fonction d'offre de tous les producteurs.

112) L'environnement économique est celui de la concurrence pure et parfaite pour les consommateurs et les producteurs. Tous deux sont « **price taker** ». Les prix sont dans les deux théories des *données*.

113) Le comportement d'optimisation procède des mêmes méthodes. Il s'agit (selon les cas) de **maximiser** (l'utilité pour le consommateur par exemple) ou **minimiser** (coûts de l'entreprise par exemple) *une fonction objectif sous contrainte*.

114) La méthode mathématique est la même : celle du **calcul à la marge** (différenciation ou intégration).

12- Deux grandes différences

121- La fonction objectif. Elle est la base du comportement. Mais elle est **subjective** pour le consommateur, tandis qu'elle est **objective** pour le producteur (ne traduisant ni ses goûts, ni ses préférences).

122) La complexité du comportement. Le comportement du producteur présente une complexité plus grande compte tenu du caractère objectif de sa fonction, et de *l'horizon de sa maximisation*, qui peut varier de la **très courte, à la longue période en passant par la courte période**.

2- La TNC_p : les deux approches technique et économique

On présente généralement la TNC_p en distinguant deux approches.

21- **L'approche technique du comportement de production.** Il s'agit de maximiser les *quantités produites* en combinant des *quantités de facteurs*. L'intérêt de cette approche est d'identifier les lois qui régissent les relations entre la variation des quantités de facteurs utilisées (ou *inputs*) et la variation des quantités produites (ou *output*). **La loi dite des « rendements décroissants (ou LRD)** ressort comme loi fondamentale de la production.

22- **L'approche économique du comportement de production.** On considère que le producteur ne peut pas maximiser les quantités produites indépendamment du résultat monétaire de ses ventes. L'importance de ce résultat est déterminée par le *prix de marché* sur lequel il n'a pas prise. Par contre, il peut ajuster **ses coûts de production**, pour viser la réalisation d'un **maximum de profit**.

Dans ces deux approches, c'est la **fonction de production** qui est l'outil principal, tout comme l'est la *fonction d'utilité pour le consommateur*. Toutefois la maximisation de la fonction de production sous contrainte, requiert les **fonctions de coûts et de recettes** (ou vente, ou chiffre d'affaires).

I) La fonction de production Q_0 à deux facteurs variables (x et y)

I1) Définition : fonction de production, inputs, output

On appelle fonction de production, la relation entre les quantités produites (et offertes) Q_0 , et les quantités (strictement positives) de facteurs de production utilisées. Ces facteurs sont généralement le travail (L pour *labor*) et le capital (K). L'écriture d'une fonction de production est donc Q_0 ou **$Q = f(K, L)$** . On appelle **output** les quantités Q_0 produites et offertes, et les **inputs** sont les quantités de facteurs utilisées (K et L).

La *production* proprement dite, désigne toute activité qui sert à la satisfaction des besoins des consommateurs en biens et services. L'entreprise (ou firme) est le lieu de cette activité ; l'entrepreneur en est possesseur ou propriétaire.

L'*univers de la production*, celui de l'entreprise, est d'abord un *univers technologique*. Celui-ci constitue la base de la production. Mais il est aussi un *univers économique*, dont la fonction de production n'est que l'un des outils.

I2) L'entreprise comme univers technologique

I21) De la technologie à la fonction de production

On appelle *technique de production* (t) la relation permettant d'associer à chaque combinaison de facteurs (x,y) une production Q , soit $Q = t(x, y)$. La technologie est constituée par l'ensemble des techniques de production. Elle définit le domaine des possibles.

I22) Le principe de *non gaspillage*

Pour une production Q donnée, la consommation des facteurs de production (x,y) doit être la plus faible possible ; et pour une consommation donnée de facteurs (x,y), la production doit être la plus élevée possible. Aussi peut-on écrire : $Q = \text{Max } t(x, y) = Q(x, y)$.

I23) Les facteurs de production et la production

La fonction de production la plus généralement utilisée est la fonction à deux facteurs, le travail et le capital. Toutefois, la théorie économique définit d'autres facteurs de production, dont *la terre, les matières premières et auxiliaires*.

Les facteurs de production sont classés selon leur **substituabilité** ou leur **complémentarité**.

Un facteur de production x est dit *substituable* au facteur y (et réciproquement) quand une même production peut être obtenue en diminuant les quantités de y et en accroissant celles de x (selon un rapport déterminé). Par exemple, si $x=2y$, alors une baisse de y entraîne une hausse deux fois plus grande de x , tout en conservant le même niveau de production Q .

Un facteur de production x est dit *complémentaire* de y , si une utilisation accrue de x entraîne nécessairement celle de y (selon un rapport déterminé). Par exemple : si $x=2y$, alors une hausse de y entraîne une augmentation nécessairement deux fois plus grande de x , tout en conservant le même niveau de production Q . Par contre, une croissance de y , non suivie d'une croissance de x (ou une croissance insuffisante), se traduira par un *gaspillage de y* , puisque le niveau de production Q , quant à lui, reste constant.

La TNC_p raisonne à partir de fonctions de production à *facteurs substituables*. La substituabilité des facteurs est complétée par

- leur *divisibilité*, propriété permettant de raisonner sur de très faibles quantités, aussi petites qu'on le souhaite (telles que le raisonnement à la marge et à la limite devient possible).
- Leur *adaptabilité*, propriété permettant de considérer l'un des facteurs comme *fixe*, tandis que l'autre *est variable*.

Les relations entre la quantité produite et la quantité de facteurs utilisée sont variées. On distingue plusieurs types de production appelés : *simple*, *liée* et *différenciée*.

Simple : l'output est alors un bien unique, homogène

Multiple : la production est une production simultanée de plusieurs biens : par exemple la production de bois et de sciure

Différenciée : l'entrepreneur peut dans ce cas, choisir le type de produit parmi ceux que les facteurs K et L lui permettent de produire.

I24) Exemples de *fonction de production*

Les symboles les plus fréquemment utilisés sont K et L pour désigner respectivement le capital et le travail, bien qu'ils appartiennent surtout à la *fonction de production macroéconomique*. On peut en microéconomie recourir à d'autres symboles, tel que (x,y) ou (x_1, x_2) .

Un exemple de fonction de production quelconque est : $Q = Ax_1^2 x_2^2 - B x_1^2 x_2^2$ ou (x_1, x_2) sont les facteurs et A et B des paramètres ;

Un exemple de fonction de production particulière, dite **Cobb-Douglas** est :
 $Q = Ax_1^\alpha x_2^\beta = Ax_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ avec α une constante/ $0 < \alpha < 1$

Conclusion

La fonction de production diffère donc de la technologie, mais elle repose sur des fondements technologiques. Les fonctions usuelles sont les fonctions à deux variables, ou deux facteurs substituables (divisibles et adaptables)) destinés à une production simple.

II) Fonction de production à facteurs substituables et concepts dérivés

II1) Caractéristiques générales de ces fonctions

Les fonctions de production usuelles sont des fonction de production à facteurs substituables, telles que :

- les facteurs de production x et y peuvent être remplacés l'un par l'autre,
- pour x et $y \geq 0$, alors $Q \geq 0$
- la fonction est mathématiquement *continue*, *dérivable* et *régulières* (dérivables autant de fois que l'on veut). Les dérivées partielles sont elles-mêmes *continues*.
- Seules les quantités d'inputs n'entraînant pas une baisse de Q ont un sens économique.

Ainsi : $x \geq x'$

$y \geq y'$ alors $Q = f(x, y) \geq Q' = f(x', y')$

- la représentation graphique permet de définir une *surface de production*, sur le même mode que la *colline d'indifférence* issue de la fonction d'utilité du consommateur. La production Q, obtenue par une combinaison (x,y), est alors un point dans l'espace à trois dimensions (0,Q,x,y). Son principe de construction est de poser l'un des facteurs fixe (par exemple $y = y_1$) et l'autre variable.

L'analyse de la relation entre les facteurs de production et le niveau de production est d'abord réalisée sur la base de l'hypothèse d'un *facteur fixe* et l'autre variable. Elle se situe alors en *courte période*. Dans un second temps, on considère que les deux facteurs varient. On passe alors à l'analyse en *longue période*.

	Courte période ou court terme	Longue période ou long terme	Remarque : une troisième hypothèse est celle de la <i>période infra courte</i> , dite aussi <i>ultra-courte période</i> . La production n'a pu alors avoir lieu et l'entreprise ne dispose que de ses stocks.
Fonction de production	Un seul facteur varie (x_1) et l'autre est fixe (x_2^0 , l'équipement par ex)	Les deux facteurs (x_1 et x_2) varient, et donc l'échelle de la production peut croître	
Fonction de coût total ou Frais	$F = \varphi(q) + b$ une partie du coût total est fixe ($=b$)	$F = F(q)$ tous les coûts sont variables	

L'analyse de courte période permet de définir et d'éclairer le **concept de rendement** (ou **productivité** bien que les deux concepts diffèrent). C'est après avoir étudié ce concept que l'on passe à ceux d'**isoproduction** (ou **isoquant**) et d'**isocoût**.

II2) Cas ou un seul facteur varie : la courte période

II21) La signification économique

Lorsqu'elle doit répondre à la demande, l'entreprise ne peut pas toujours agir sur son stock de capital fixe (K). Celui-ci est en effet constitué par les machines, les bâtiments etc., et il est constant pour une durée importante. Par contre, elle peut *flexibiliser sa quantité de main d'œuvre* (L).

Le concept alors utilisé pour rendre compte de cette situation est celui de *productivité du facteur variable* (auquel on associe celui de rendement).

II22) Définitions de la productivité d'un facteur variable

On distingue **trois « types » mathématiques de productivité pour un facteur :**

- La **productivité totale** (P_T) : Si $Q = f(x_1, x_2)$ en considérant $x_2 = x_2^*$ constant, la productivité totale du facteur variable x_1 s'écrit : $Q = f(x_1, x_2^*)$. C'est la quantité de biens (q) pouvant être produite par l'input x_1 , lorsqu'on l'autre facteur est supposé constant ou donné. On note cette productivité « P_T ».
- La **productivité Moyenne** (P_M) : Si $Q = f(x_1, x_2)$ en considérant $x_2 = x_2^*$ constant, la *productivité Moyenne* du facteur variable x_1 s'écrit : $Q = f(x_1, x_2^*) / x_1$. C'est donc la productivité totale divisée par la quantité utilisée du facteur variable.
- La **productivité marginale** (P_m) : Si $Q = f(x_1, x_2)$ en considérant $x_2 = x_2^*$ constant, la productivité marginale du facteur variable x_1 s'écrit : $\partial Q / \partial x_1 = \partial f(x_1, x_2^*) / \partial x_1$. C'est donc la dérivée partielle par rapport à x_1 de la fonction de productivité totale.

Tableau résumé du concept de productivité

La fonction de production à facteurs substituables : $Q = f(x_1, x_2)$ L'hypothèse : $x_2 = x_2^* = \text{constante}$		
La productivité du facteur variable x_1		
Totale (P_T) $Q = f(x_1, x_2^*)$	Moyenne (P_M) $\frac{Q}{x_1} = \frac{f(x_1, x_2^*)}{x_1}$	Marginale (P_m) $\frac{\delta Q}{\delta x_1} = \frac{\delta f(x_1, x_2^*)}{\delta x_1}$

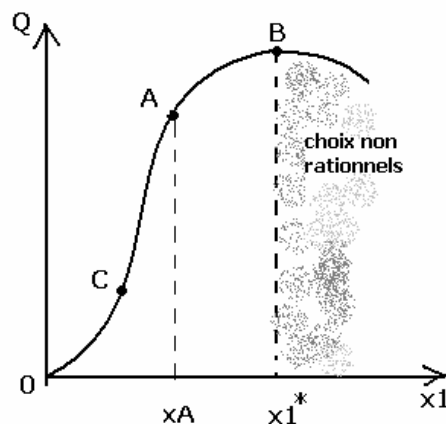
II23) Analyse des relations entre les concepts de P_T , P_M et P_m : représentation graphique.

II231) La courbe de productivité totale et son explication

Sous l'hypothèse précédente d'un facteur de production $x_2 = x_2^*$, donné en quantités, la fonction de production donne immédiatement la productivité totale : $P_T = Q = f(x_1, x_2^*)$ de x_1 . **Il apparaît alors que les quantités produites ne varient que sous l'effet de l'adjonction d'unités supplémentaires du facteur variable x_1 , par exemple le facteur travail.**

Mais Seules les variations $0 \leq x_1 \leq x_1^*$ importent pour l'analyse de la P_T . Leur signification apparaît dans le graphique habituel ci-dessous :

La courbe de productivité totale de x_1 et ses points significatifs



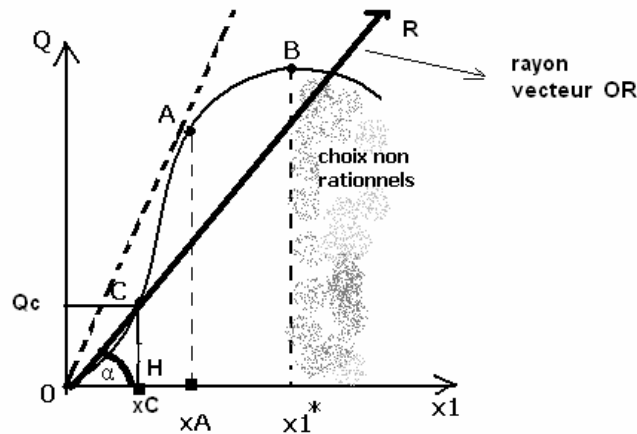
L'allure de la courbe procède d'abord du bon sens. En effet, on admet que l'un des facteurs étant fixe, l'autre facteur (ici x_1 dont les quantités sont en abscisse) doit présenter une relation aux quantités produites (en ordonnée) telle que :

- si sa quantité est nul, le produit total en ordonnée est nul (l'origine de la courbe est 0),
- l'adjonction d'unités supplémentaire a *dans un premier temps un effet favorable* sur la croissance des quantités (de 0 à C), puis *très favorable* (de C à A). Mais ceci ne peut durer, et l'adjonction d'unités supplémentaires exerce toujours un effet favorable, mais de moins en moins (de A à B). Il existe enfin un seuil où l'*effet favorable* atteint son **maximum**. Au point B l'adjonction d'une unité supplémentaire de x_1 générerait la production, en faisant diminuer celle-ci. Le domaine grisé traduit ce phénomène de choix irrationnels.

Le raisonnement qui fonde l'allure de la courbe repose sur la Productivité moyenne (P_M) de x_1 . La représentation de la courbe de productivité moyenne sera faite plus loin.

On sait que pour x_2 donné, la P_M est la *quantité produite par unité de facteur x_1* , soit (Q/x_1) . Ce sont les variations de cette quantité qui expliquent l'allure de la courbe de P_T . La démonstration géométrique suppose la représentation de la productivité moyenne dans le graphe de la P_T . On montre ci-dessous l'égalité : $P_M = (Q/x_1) = HC/OH = \text{tg}\alpha$.

Les variations de la productivité moyenne :
phénomène explicatif de l'allure de la courbe
de productivité totale



Dans cette représentation la *productivité moyenne* est représentée par la *tangente de l'angle compris entre l'axe des abscisse et un rayon vecteur OR*. En effet, on sait que la formule générale de P_M est (Q/x_1) . On constate que le vecteur OR coupe la courbe de P_T au point C, de coordonnées (x_C, Q_C) . Par conséquent $(Q_C/x_C) = HC / OH = \text{tg}\alpha$, et $\text{tg}\alpha$ varie comme α .

On comprend donc que :

- $P_M = 0$ quand $x_1 = 0$
- P_M maximum lorsque le rayon vecteur OR est tangent à $Q(x_1, x_2^*)$, c'est-à-dire au point A,
- P_M décroît ensuite.

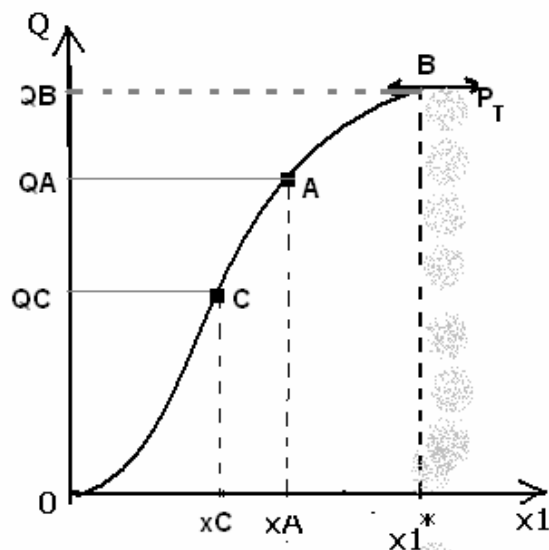
Le raisonnement qui fonde l'allure de la courbe repose aussi sur la *Productivité marginale (P_m) de x_1* .

On sait que $P_m = \partial Q / \partial x_1$. La productivité marginale rend donc compte de la vitesse de variation de la productivité du travail. Cette vitesse de variation n'est autre que la pente de la tangente à la courbe de P_T . Cette pente est : *nulle* aux points 0 et B. Elle est croissante de 0 à C, puis diminue de C à B. On peut donc dès à présent relever plusieurs valeurs remarquables qui constituent des relations fondamentales entre P_T et P_m :

- $P_m = \partial Q / \partial x_1$ est maximum au point C
- $P_M = Q/x_1$ maximum au point A,
- $P_T = Q = f(x_1, x_2^*)$ maximum au point B où $P_m = 0$.

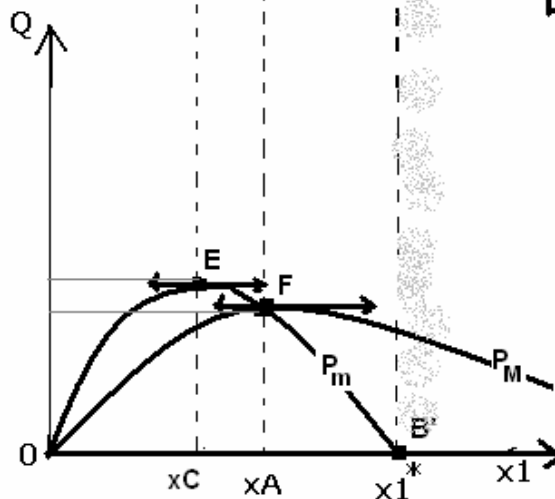
II232) Les relations fondamentales entre P_T , P_M et P_m : représentation graphique.

Les relations que l'on vient d'esquisser sont habituellement représentées graphiquement sous la forme de la figure de deux graphes superposés ci-dessous.



Les relations significatives

- PT Max = Pm nulle (aux points B et B')
- Inflexion de la croissance de PT (point C) = Max de Pm (point E)
- Ralentissement de la croissance de PT (point A) = Max de PM (point F) = Pm (point F)



II24) La « loi des rendements décroissants » (LRD ou plus proprement de la « productivité décroissante »).

On aura compris que si l'entrepreneur attend de l'adjonction de quantités de facteurs une hausse des quantités produites, se pose à lui le problème du *seuil optimal*. C'est la productivité marginale du facteur qui fournit la réponse. Le seuil correspond au *maximum de la productivité marginale* (point F). En deçà, elle est croissante : $\partial^2 Q / \partial^2 x_1 > 0$. Au-delà la productivité marginale décroît ($\partial^2 Q / \partial^2 x_1 < 0$), pour s'annuler ($\partial^2 Q / \partial^2 x_1 = 0$) lorsque la quantité de facteurs égale x_1^* . Alors la productivité totale atteint son maximum ($Q = f(x_1, x_2^*)$ Max).

On appelle alors *loi des rendements décroissants* le principe suivant lequel l'adjonction de quantités successives d'un facteur variable permet d'accroître les quantités produites, suivant un taux décroissant jusqu'à atteindre 0. Il est aisé de repérer cette croissance dans le graphique supérieur, celui de P_T (par exemple, car il correspond à une évolution retracée dans le graphique inférieur).

La zone des rendements factoriels croissants est située dans la portion de courbe entre 0 et C. Alors P_m est croissante.

La zone des rendements factoriels décroissants est située dans la portion de courbe entre **C** et **B**. Alors P_m est décroissante. Ils décroissent aussi entre A et C, mais à un taux plus faible. Cette décroissance de la productivité totale s'accroît au point où $P_M = P_m$ (point F).

L'égalité $P_M = P_m$ se démontre comme suit. On montre que la condition suffisante pour que P_m coupe P_M en son maximum, est que pour $x_1 = x_A$, P_M atteignant son maximum est alors égale à P_m .

L'abscisse x_1 du maximum (soit x_A) de P_M est telle que la dérivée première de la PM est nulle. On appelle P_M la fonction $Q_{x_1} = Q/x_1$ et on appelle PT, la fonction $Q=Q(x_1)$, x_2 étant constant. Alors (en écriture différentielle) la dérivée de P_M s'écrit :

$\delta/\delta x_1 (Q/x_1)$. Il s'agit de la dérivée d'un quotient de deux fonctions, soit u/v , avec $u = Q_{x_1}$ et $v = x_1$. On a en effet $Q = Q(x_1)$ et $Q_{x_1} = Q/x_1$.

On utilise la propriété suivant laquelle la dérivée du quotient de $u/v = (vu' - uv')/v^2$ soit ici : $[x_1 (\partial Q/\partial x_1) - Q] / x_1^2 \Leftrightarrow [x_1 Q'_{x_1} - Q]/x_1^2$, avec : $u = Q_{x_1}$; $v = x_1$; $u' = Q'_{x_1} = (\partial Q/\partial x_1)$; $v' = 1$. Or, $[x_1 Q'_{x_1} - Q]/x_1^2 \Leftrightarrow 1/x_1 [(\partial Q/\partial x_1) - Q/x_1] \Leftrightarrow 1/x_1 [P_m - P_M]$, d'où l'on conclut que la valeur $x_1 = x_A$ qui annule cette dérivée est telle que $[P_m - P_M] = 0$ et donc que $P_M = P_m$.

En résumé : $P_m = P_M$
 $(\partial Q/\partial x_1) = Q/x_1$
 $\Leftrightarrow \partial/\partial x_1 (Q/x_1) = 0$ (point où la dérivée de PM est nulle)
Le maximum de la productivité moyenne est atteint au point où elle égalise la productivité marginale

La LRD est un des principes fondamentaux du marginalisme appliqué à la théorie de la firme et de la concurrence. On doit ses origines aux travaux des auteurs classiques (Ricardo, Malthus...), leurs prédécesseurs, voire à des auteurs mercantilistes antérieurs aux classiques.

Comme on l'a dit ce constat est néanmoins insuffisant pour la détermination de l'équilibre ou optimum du producteur. Il importe de considérer **les coûts** représentés par ces facteurs et plus généralement les **coûts de production**. Toutefois, son principe demeure, car la LRD a pour contrepartie, celle des *coûts croissants* (voir infra).

II25) L'élasticité de la production Q par rapport à x_1

Connaissant les P_M et P_m , il est possible d'écrire *l'élasticité de la production Q par rapport au facteur variable x_1* , et en donner la signification. L'élasticité s'écrit comme le rapport de deux variations relatives :

$$\epsilon_{Q/x_1} = \frac{dQ/Q}{dx_1/x_1} = \frac{\delta Q/\delta x_1}{Q/x_1} = \frac{\text{Productivité marginale}}{\text{Productivité moyenne}} \text{ de } x_1$$

Les valeurs de ϵ_{Q/x_1} décrivent des relations entre P_M et P_m

$\epsilon > 1$: $P_m > P_M$; x_1 varie dans l'intervalle $[0, x_A]$

$\epsilon = 1$: $x_1 = x_A$

$\epsilon < 1$: $P_M > P_m$; x_1 varie dans l'intervalle délimité par les points **A, B**

$\epsilon = 0$: $x_1 = x_1^* = \text{Maximum de } P_T$

On démontre que dans le cas d'une fonction de production Cobb-Douglas : $Q = Ax_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, l'élasticité $\varepsilon = \alpha < 1$. Les variations de x_1 sont alors réduites à l'intervalle

$$]x_A, x_1^*]$$

II3) Cas où les deux facteurs sont variables : *La longue période*

Dans la courte période, celle de la situation précédente, on a supposé l'échelle de la production fixée, considérant qu'un seul facteur est variable.

L'analyse de la fonction de production en longue période suppose que les deux facteurs « Travail » et « Capital » sont variables. Cette variation, généralement positive, entraîne une croissance de la production Q , assimilée à une *variation des rendements à l'échelle des facteurs*.

Le concept de *rendement*, diffère donc de celui de *productivité*. Il prend son sens dans la longue période.

Le passage à la longue période modifie significativement l'analyse de la production envisagée en *courte période*.

II31) La mesure des rendements d'échelle : *étude du degrés d'homogénéité de la fonction de production*.

II311) Définition d'une fonction homogène de degrés k

Une fonction de production $Q = f(x_1, x_2)$ est dite *homogène de degrés « k »* lorsqu'elle vérifie la propriété suivante : si on multiplie les quantités utilisées de facteurs x_1 et x_2 par un même

nombre réel positif « t », alors la fonction est elle-même multipliée par t^k .

soit : $Q = f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2)$
On dit alors que la fonction est homogène de degrés « k ».
« k » est donc le degrés d'homogénéité de la fonction

Il existe par conséquent trois types de fonctions suivant leur degrés d'homogénéité : les fonction homogènes de degrés 0 ($k=0$), les fonction homogènes de degrés 1 ($k=1$), et les fonctions homogènes de degrés supérieur à 1 ($k>1$). On exclut donc les fonctions dont le degrés d'homogénéité est inférieur à 1 ($k<1$)

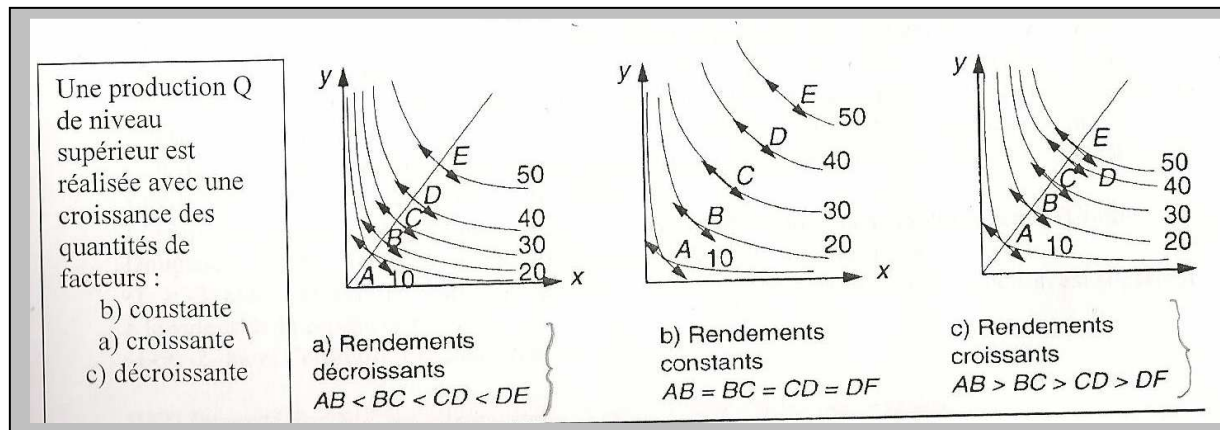
Par exemple, dire qu'une fonction est homogène de degrés 1, signifie que lorsqu'on double les quantités utilisées d'inputs ($2x_1, 2x_2$), la fonction est elle-même multipliée par 2 (et donc les quantités produites ou output). **Ce type de fonction est privilégié dans la théorie du producteur, car sont alors vérifiées : l'identité d'Euler et avec elle la règle de l'épuisement du produit (cf Infra).**

Le degrés d'homogénéité « mesure » les rendements d'échelle. On distingue trois types de rendements d'échelle suivant « k ».

$k=1$, les rendements d'échelle sont *constants* (exemple ci-dessus)

$k<1$, les rendements d'échelle sont *décroissants* (Delaunay propose l'expression « *non décroissants* » afin d'éviter la confusion avec les rendements *factoriels décroissants* ou LRD examinée plus haut),

$k>1$, les rendements d'échelle sont *croissants*.



II312) Exemples

a) La fonction $Q = f(x, y) = (x^3 - 4xy^2)/y - x$ est-elle homogène ?

On calcule $f(tx, ty) = (tx^3 - 4txty^2)/ty - tx \Leftrightarrow (t^3x^3 - 4txty^2)/ty - tx$
 $= t^3(x^3 - 4xy^2)/t(y - x)$ en simplifiant par t
 $= t^2(x^3 - 4xy^2)/y - x$
 $= t^2 f(x, y)$

La fonction vérifie la propriété des fonctions homogènes : $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$. On lit que « k » = 2. La fonction est donc homogène de degrés 2. Ce qui signifie que si on double les quantités utilisées de facteurs (x, y) par exemple (soit $t=2$), alors l'output (les quantités produites) sont multipliées par $2^2=4$.

b) Les fonctions linéaires homogènes : Cobb Douglas et CES (*constant elasticity of substitution*)

On l'a dit, les fonctions homogènes de degrés 1 sont privilégiés dans la théorie du producteur. Elles constituent avec les fonctions homogènes de degrés 0, des fonctions fréquemment utilisées.

Le degrés de base est 1, et les fonctions correspondantes sont dites *linéaires homogènes*.

Exemple : Soit la fonction Cobb-Douglas $Q(x, y) = Ax^\alpha y^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, constant. Vérifions son degrés d'homogénéité.

$$Q(tx, ty) = A tx^\alpha t y^{1-\alpha} = At^\alpha x^\alpha t^{1-\alpha} y^{1-\alpha} = At^\alpha t^{1-\alpha} x^\alpha y^{1-\alpha}$$

$$\text{Or, } t^\alpha t^{1-\alpha} = t^{\alpha+1-\alpha} = t^1 = t, \text{ et donc } Q(tx, ty) = t^1 Q(x, y)$$

La fonction Cobb-Douglas est donc une fonction linéaire homogène.

Une autre fonction type partage ce résultat, et possède comme la précédente une fréquence d'utilisation élevée. C'est la fonction de production CES (*constant elasticity of substitution*).

Elle est de la forme : $Q(x, y) = K[(ax^{-\beta} + by^{-\beta})]^{-1/\beta}$ où $\beta \neq \alpha$ et $a, b > 0$ et $b = (1-\alpha)$, et K est un facteur d'échelle. Le paramètre « α » est un *paramètre de dimension* qui indique les parts relatives des revenus des facteurs x et y . Le paramètre « β » donne la valeur de l'*élasticité de substitution* (cf infra).

c) Identité d'Euler et règle de l'épuisement du produit

La principale propriété des fonctions linéaires homogènes est de vérifier l'identité d'Euler.

Soit la fonction homogène de degrés « k », $Q = f(x_1, x_2)$, alors d'après le **théorème d'Euler** on a :

$x_1 f'_1 x_1 + x_2 f'_2 x_2 \equiv k f(x_1, x_2)$ et par exemple $x_1 f'_1 x_1$ est le produit de la quantité utilisée du facteur x_1 par sa productivité marginale.

Si la fonction est homogène de degrés $k = 1$ (ou linéaire homogène), l'identité devient :

$$x_1 f'x_1 + x_2 f'x_2 \equiv f(x_1, x_2)$$

Le membre de gauche (ou -1-) mesure la contribution des facteurs de production. Le membre de droite (ou-2-) est la production totale due à l'utilisation des facteurs de production. On lit que $1 \equiv 2$. Cette égalité constitue une autre règle essentielle de la TNC_p, appelée « **règle de l'épuisement du produit** ».

La règle de l'épuisement du produit

Elle signifie que **lorsque les facteurs de production sont rémunérés selon leur productivité marginale en valeur, alors le produit total est entièrement épuisé (ou réparti) dans la rémunération des facteurs, travail et capital.**

En effet, à l'optimum, on sait que chaque facteur reçoit une rémunération égale à sa productivité

marginale : pour le travail on a $f'x_1 = w$ (unité de salaire) et pour le capital on a $f'x_2 = r$ (profit normal). Par conséquent la signification mathématique est :

$$x_1 w + x_2 r \equiv p \times f(x_1, x_2) \equiv p \times Q$$

Le membre de droite est la valeur de la production (quantités $\times$ prix de vente).

L'équivalence n'est systématique que dans le cas des fonctions linéaires homogènes (Cobb-Douglas, ou CES). Quant elle n'est pas réalisée, il y a deux cas possibles :

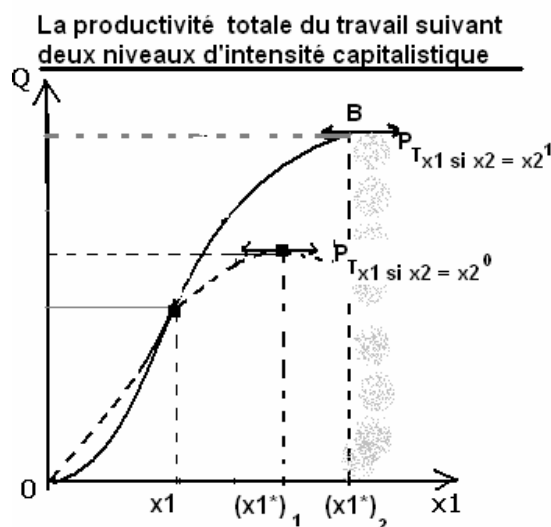
-1- $>$ -2- alors l'entreprise réalise des pertes dues au fait que le coût de la production est supérieur à la valeur de la production.

-1- $<$ -2- alors l'entreprise réalise un profit ou rente.

II32) Intensité de l'utilisation du capital et effet sur la productivité du travail

Dès lors qu'on envisage le capital comme variable, la productivité du travail est modifiée selon le niveau de l'équipement. Si x_2 désigne le facteur capital, et x_2^0, x_2^1 deux niveaux d'équipement tels que $x_2^0 < x_2^1$, on appellera *intensité de l'utilisation du capital* (ou « *intensité capitaliste* ») les rapports (x_1^0 / x_2^0) et (x_1^0 / x_2^1) . On observe alors la relation : $(x_1^0 / x_2^1) > (x_1^0 / x_2^0)$ sous l'hypothèse d'une invariance du progrès technique incorporée dans les deux types d'équipement.

En supposant que la quantité utilisée du facteur travail x_1 varie de 0 à x_1^* , il est possible de représenter (suivant le graphique connu) la courbe de la productivité totale du travail selon l'intensité capitaliste.



Si les niveaux d'intensité capitalistique x_2^0 , x_2^1 caractérisent deux entreprises différentes, on constate alors que pour x_1 allant de 0 à x_1 , la zone des rendements factoriels *croissants*, l'entreprise dotée de l'intensité x_2^0 tire un avantage du rapport (x_1^0/x_2^0) , car elle est plus favorable à la productivité. Mais au-delà de x_1 , la relation s'inverse. L'équipement plus important de la seconde entreprise dotée de l'intensité $x_2^1 > x_2^0$, lui permet d'accroître la production au-delà du maximum $(x_1^*)_1$ de l'autre entreprise. On lit en effet que $(x_1^*)_2 > (x_1^*)_1$.

La leçon est qu'une entreprise plus capitalistique réalise des performance supérieures à celle qui l'est moins.

II4) Les « isoquants » ou courbes d'égale production ou d'isoproduction.

La fonction de production à deux facteurs, dont la représentation graphique est celle d'une colline de production dans l'espace à trois dimensions (O, Q, x_1, x_2) , peut être traduite par translation dans le plan $(0, x_1, x_2)$ sous la forme de courbes appelées *isoquants*, synonyme d'égale production, ou isoproduction. Cette traduction doit permettre de retrouver les résultats relatifs à la productivité et aux rendements.

La construction des isoquants est une étape vers la détermination de la production optimale eu égard aux coûts des facteurs de production.

II41) Propriétés des isoquants et calcul du TMST ou TST (taux de substitution technique entre les facteurs)

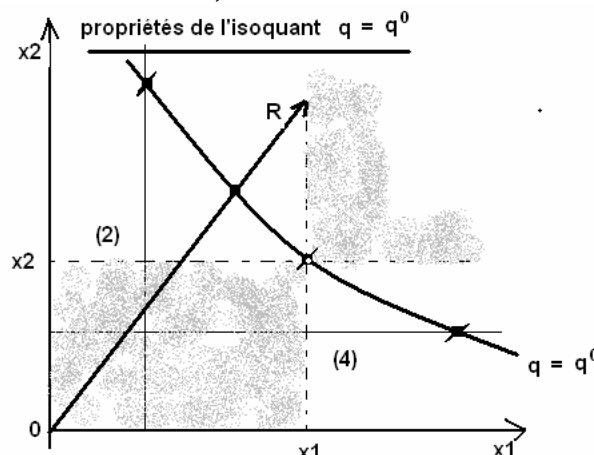
II411) Définition : Une courbe d'égale production ou *isoquant* représente pour deux facteurs de production x_1 et x_2 , l'ensemble des combinaisons réalisant le même niveau de production, donc telles que $Q(x_1, x_2) = q^0$.

L'isoquant joue dans la théorie du producteur le même rôle que la courbe d'indifférence dans la théorie du consommateur.

II412) Propriétés

- Deux isoquants ne peuvent se couper. Le principe de non gaspillage ne serait pas respecté dans le cas contraire. Si la combinaison (x_1, x_2) permet une production $q > q^0$, on ne doit pas constater que l'on préfère $q^0 < q$.
- Les variations positives des quantités de facteurs Δx_1 et Δx_2 , entraîne que :
 $Q(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) > Q(x_1, x_2) = q^0$ et $Q(x_1 - \Delta x_1, x_2 - \Delta x_2) < Q(x_1, x_2) = q^0$

La courbe d'égale production se situe donc dans les quadrants (2) et (4) du graphique ci-après (le vecteur $\overrightarrow{OR}$ intervient ensuite):



- Sur un vecteur $\overrightarrow{OR}$, ainsi que sur les parallèles aux axes $0x_1$ et $0x_2$, il n'existe qu'un point correspondant à l'isoquant $q = q^0$. Partout ailleurs on a Δx_1 et Δx_2 de même signe,

la production augmentant (+) ou diminuant(-). Ce phénomène permet de définir la *carte des isoquants* comme l'ensemble des courbes d'égale production représentée par la fonction de production.

II413) La propriété de convexité et le TMST, et la définition du domaine rationnel de production

La propriété de convexité

Le long d'un isoquant $Q(x_1, x_2) = q^0$, puisque la fonction est différentiable, on a :

$dq = (\partial Q / \partial x_1) dx_1 + (\partial Q / \partial x_2) dx_2 = 0$, soit la différentielle totale de la fonction est nulle puisque la production est la même en chaque point. En permutant on a : $dx_2 / dx_1 = - (\partial Q / \partial x_1) / (\partial Q / \partial x_2) = -q_1 / q_2$ si on résume les dérivées partielles.

On en déduit que dx_2 / dx_1 est la pente de la tangente en chaque point de la courbe. Cette pente est négative puisque q_1 et $q_2 > 0$

Un déplacement de droite à gauche de la courbe est une diminution de $q_1 (= \partial Q / \partial x_1)$, accompagnée d'une augmentation de $q_2 (= \partial Q / \partial x_2)$. Il revient au même de dire que la *productivité marginale de x_1 diminue*, tandis que celle de x_2 *augmente*. Le résultat est que le rapport ($-q_1 / q_2$, ou la pente) augmente de droite à gauche. *Par conséquent la courbe isoquant est convexe par rapport à l'origine.*

Le TMST ou TST est alors le taux auquel le producteur est conduit à substituer l'un des facteurs à l'autre pour conserver le même niveau de production ou rester sur le même isoquant. Il est égal à l'opposée de la pente de la tangente en un point de l'isoquant, soit

$$\text{TMST} = - dx_2 / dx_1$$

et en vertu du résultat précédent : $\text{TMST} = (\partial Q / \partial x_1) / (\partial Q / \partial x_2) = \text{rapport des productivités marginales}$. Le TMST_{x_2/x_1} est donc décroissant le long de l'isoquant, traduisant sa convexité.

Le domaine rationnel de production

Ainsi qu'on l'a vu plus haut, la croissance de la productivité totale atteint un seuil au-delà duquel il n'est pas rationnel pour l'entreprise, de recourir à des quantités additionnelles de facteurs. Le domaine rationnel de production est donc celui où l'adjonction d'unité de facteurs reste rentable. L'équation de la courbe qui délimite le domaine rationnel de production est déterminée à l'aide du TMST.

On cherche d'abord l'abscisse du point qui annule le TMST, telle que $q = f(x_0)$, avec x_0 cette abscisse ; puis on remplace « q » par son expression en « x » dans l'équation générale de isoquants, pour définir l'équation $x_2 = f(x_1)$. Celle-ci donne la courbe limite à droite de laquelle il n'est pas rationnel de produire.

II414) L'élasticité de substitution factorielle (σ)

La décroissance du TMST est la traduction du phénomène dit de substitution entre facteurs (x_1 et x_2), ou factorielle. Elle signifie que la *technique de production*, ou « *intensité capitalistique* » ($x_2 / x_1 \Leftrightarrow \text{capital/travail}$), se modifie et avec elle les quantités utilisées des facteurs. Ce changement peut être estimé à l'aide de l'élasticité de substitution factorielle (σ), ainsi que l'a proposé J. Hicks.

Formule de l'élasticité de substitution factorielle

$$\sigma = \frac{\frac{(dx_2 / dx_1)}{x_2 / x_1}}{\frac{d(\text{TMST})}{\text{TMST}}}$$

Cette élasticité met donc en relation les variations relatives du TMST et le rapport (capital/travail) , soit (x_2 / x_1). Plus précisément, elle mesure la variation en % de l'intensité d'utilisation des facteurs employés à la

suite d'une variation en %, donnée, du TMST, ou ce qui est identique, de leur prix relatif (p_1/p_2).

Les valeurs de l'élasticité de substitution et leur interprétation : on retient que :

$\sigma = \infty \Leftrightarrow$ parfaite substituabilité entre les facteurs

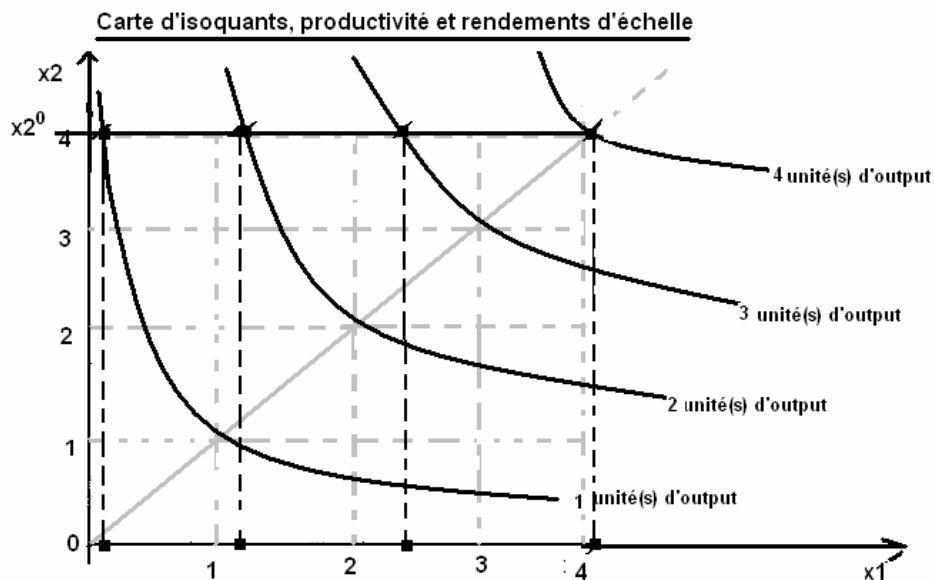
σ varie dans l'intervalle allant de 0 à l' ∞ . Plus cette valeur est élevée, plus la substitution factorielle est facile

$\sigma = 1$, dans le cas d'une fonction Cobb-Douglas

$\sigma = (1/1+\beta)$ dans le cas d'une fonction CES (voir supra cette fonction)

II415) Productivité et rendements dans la carte des isoquants

Une carte d'isoquants donne les quantités de facteurs utilisées pour atteindre différents niveaux de production. Sa forme générale est :



La carte ci-dessus correspondant à $Q(x_1, x_2)$ permet d'illustrer la *productivité totale du facteur* x_1 pour x_2 fixé et égale à x_2^0 . celle-ci est lisible le long de l'horizontale d'ordonnée x_2^0 , aux points d'intersection avec les isoquants. Dans cet exemple, le maximum de la production résultant de x_1 variable, et x_2^0 fixe, est de 4 unités d'output.

La carte permet également d'illustrer simultanément l'existence de *rendements d'échelle constants* et le phénomène de la *productivité marginale décroissante* de x_1 . La première se lit : quand on double x_1 et x_2 , la production croît de 2 unités. Les rendements d'échelle sont donc constants.

Le second se lit : quand $x_2 = x_2^0 = 4$ unités, il est nécessaire d'ajouter de plus en plus de x_1 , pour réaliser 1 unité supplémentaire d'output.

III) L'optimisation de la production : maximisation de l'output sous contrainte de coûts

Introduction

La production n'est que l'un des aspects de l'entreprise. Celle-ci doit aussi *acheter* (subir des coûts en faisant des avances d'argent) et *vendre* (suivant un prix de marché). Aux deux pôles (achat et vente), les *prix* sont donc un élément nécessaire de sa décision.

La stratégie de l'entreprise peut consister, soit à *déterminer sa production optimale*, connaissant les combinaisons techniques efficaces et le coût des facteurs. Elle peut aussi consister à *déterminer l'avance optimale* sachant le niveau de production qu'elle souhaite atteindre. Dans le premier cas l'optimum recherché est un *maximum* (de production), tandis que dans le second c'est un *minimum* (de coûts).

Mais plus fondamentalement et plus généralement, l'intérêt de l'entreprise porte sur *la rentabilité de sa propre activité*. Aussi les comportements précédents (maximisation de la production ou minimisation des coûts), peuvent-ils paraître abstrait au regard de *l'objectif de maximisation du profit*. Le profit de l'entreprise est un *résidu* entre le résultat des ventes, ou chiffre d'affaires, et les avances initiales, ou frais de production.

Soit donc les trois stratégies destinées à optimiser la production :

- recherche de la *production optimale* (maximum)
- recherche du *coût minimum* (minimum)
- recherche du *profit maximal* (maximum)

Selon la période choisie, ces trois stratégies convergent ou non. En *longue période* il y a *coïncidence et identité de solution* entre les trois. Tandis qu'en *courte période* ce n'est pas le cas.

La TNC_p est une théorie principalement statique, et de courte période, elle privilégie *la stratégie de la maximisation du profit*. L'un des inconvénients de cette démarche est de constituer une mauvaise introduction à *l'équilibre général*.

Les *fonctions de coûts* sont l'une des causes. On sait que le *coût d'un facteur* est le *prix unitaire de ce facteur tel qu'il est déterminé par le marché*. Ce qui le distingue des dépenses totales subies pour la production totale, parfois appelé *coût total*, qu'il est préférable d'appeler *frais* (ou *avances*) *totaux*.

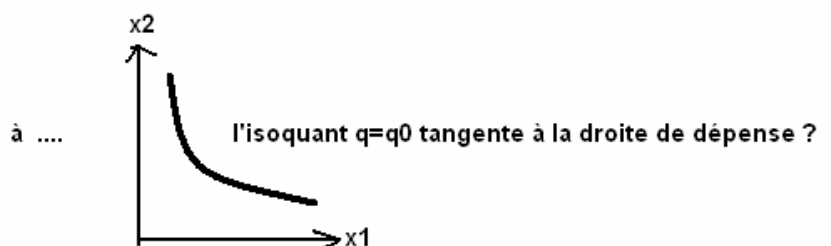
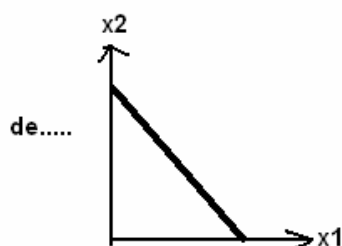
III1) Optimisation de la production : définitions et méthodes

III11) Les trois stratégies de maximisation sous contrainte

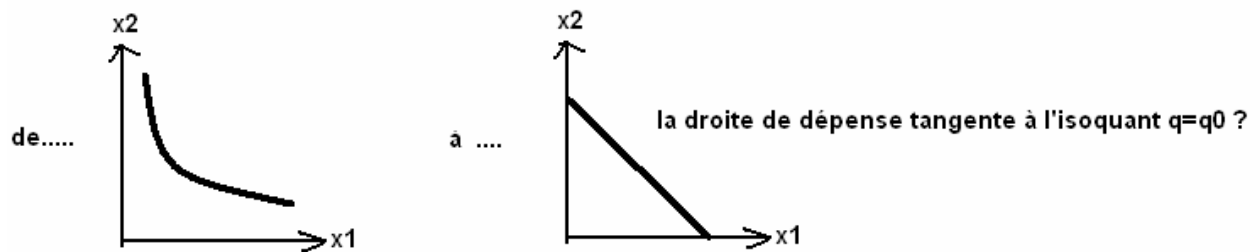
III111) Définitions

On raisonne habituellement sur des données connues. Ainsi sont connues : *la fonction de production (quelconque, Cobb-Douglas, ou CES)*, et *la fonction de frais sous une forme linéaire des inputs achetés*.

- a) $q = q_0$? En connaissant l'avance totale, quelle sera la production (maximale réalisée) ? Soit graphiquement :

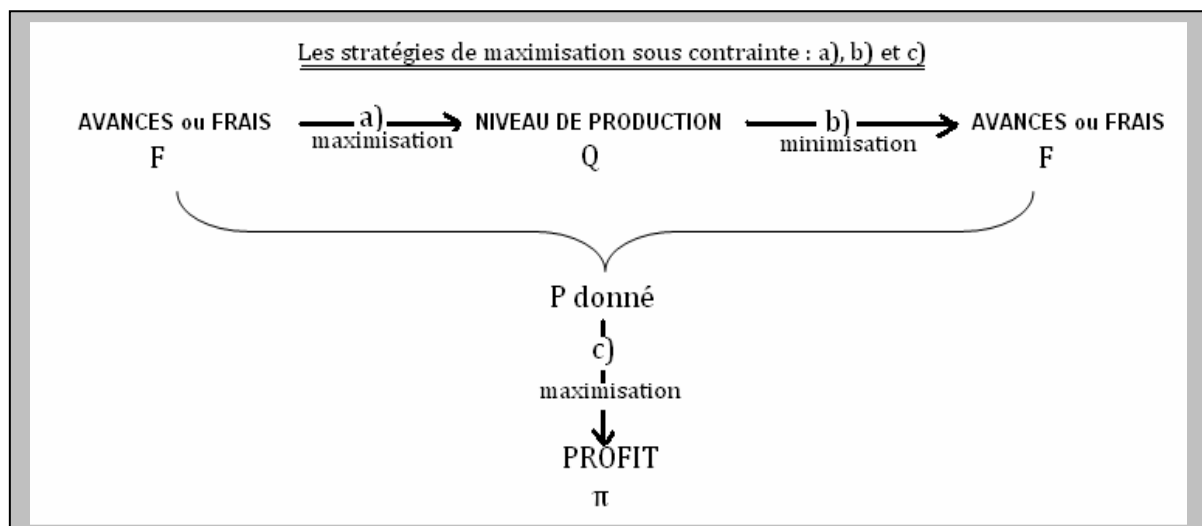


- b) frais = frais minimum ? Connaissant le niveau de production souhaité, quelle avance faut-il réaliser ? Soit graphiquement :



- c) profit (π) = π Max ? Connaissant la production ($q=q_0$), les frais totaux, et le prix de vente de l'output, quel sera le profit maximum ? Graphique exposé ultérieurement.

Ce que l'on peut résumer par un schéma :

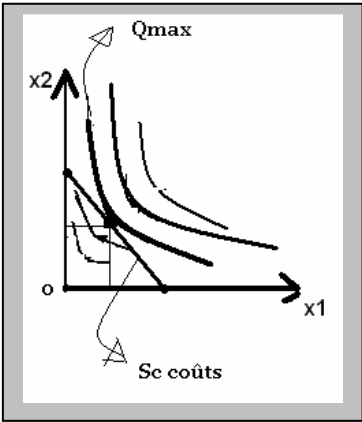
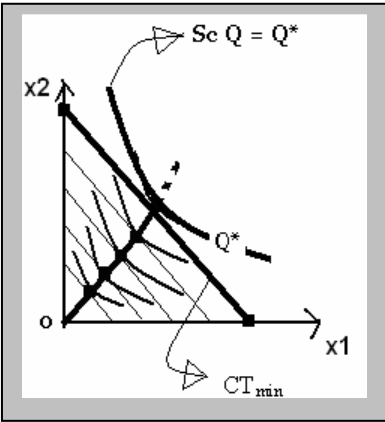
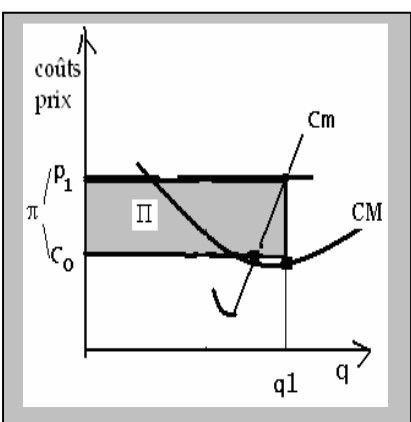


III112) Tableau récapitulatif

Optimisation de la production

Les trois stratégies de maximisation sous contrainte

(M_{x1} , M_{x2} , M_{x3})

Intitulé	M_{x1} $Q_{\max}$ S_c coûts (CT)	M_{x2} $CT_{\min}$ S_c production (Q^*)	M_{x3} $\Pi_{\max}$
Programme	$\text{Max} Q = f(x_1, x_2)$ $S_c : CT - x_1 p_1 - x_2 p_2 = 0$	$\text{Min} CT = x_1 p_1 + x_2 p_2$ $S_c : Q^* - q(x_1, x_2) = 0$	$\text{Max} \Pi = (p \times q) - F(q)$
Méthodes	- Multiplicateur de Lagrange - TMST = rapport des prix des facteurs	- Multiplicateur de Lagrange - TMST = rapport des prix des facteurs - Equation du sentier d'expansion	COURTE PERIODE Premier ordre : $p = C_m$ Second ordre : C_m croissant LONGUE PERIODE Indirecte : $p = C_m$ Directe : <i>égalité rapport des productivités marginales et rapport des prix des facteurs</i>
Graphique			

III112) Maximisation de la production sous contrainte d'une **avance donnée** (M_{x1})

a) La méthode

La fonction de frais totaux (ou avances) s'écrit : $C = p_1 x_1 + p_2 x_2$ avec (x_1, x_2) les quantités utilisées de facteurs *travail* et *capital*, et (p_1, p_2) les *prix respectifs* de ces facteurs ; salaire unitaire pour le travail et intérêt d'une unité de capital.

Une avance donnée ou connue s'écrit : $C = C_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2$. En changeant sa forme on tire l'expression de la droite ($x_1 = f(x_2)$) qui sert de contrainte au problème de la maximisation. Graphiquement elle est représentée par une droite appelée *droite d'isocoût* ou un **isocoût**. En effet

Equation de la contrainte de coût

$$C_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2 \Leftrightarrow x_1 = -(p_2/p_1) x_2 + C_0/p_1$$

On sait que la fonction de production s'écrit $q = q(x_1, x_2)$. Elle doit être maximiser sous la contrainte C_0 , pour

déterminer l'isoquant tangente à celle-ci, et donc la production optimale.

Pour cela, on écrit le **Lagrangien** $L = q(x_1, x_2) + \lambda (C_0 - p_1 x_1 - p_2 x_2)$

La condition du premier ordre est l'annulation simultanée des trois dérivées partielles :

$$\delta L / \delta x_1 = q'_{x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\delta L / \delta x_2 = q'_{x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\delta L / \delta \lambda = C_0 - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

Ce système de 3 équations à 3 inconnues (x_1, x_2, λ) peut être résolu de différentes manières. La valeur de l'inconnue λ étant peu utilisée, on élimine généralement λ par une opération algébrique ramenant le système à 2 équations et 2 inconnues $(x_1$ et $x_2)$. C'est la valeur respective de ces deux quantités qui est l'objectif du calcul, soit la détermination des quantités optimales $(x_1^*$ et $x_2^*)$.

Elles ne sont optimales que si la condition du second ordre est vérifiée. Le déterminant de la matrice hessienne bordé doit être positif. On vérifie moins souvent cette condition supposée vérifiée *a priori*, compte tenue de la convexité implicite des fonctions.

En supposant vérifiée cette condition, la combinaison (x_1^*, x_2^*) est alors une combinaison optimale. **Le point correspondant dans le graphique (l'optimum Ω) vérifie l'égalité :**

$$\text{A l'optimum : } \text{TMST} = \frac{(\delta Q / \delta x_1)}{(\delta Q / \delta x_2)} = \frac{p_{x1}}{p_{x2}}$$

le rapport des productivité marginales est égal au rapport des prix des facteurs

a) Un exemple

Soit $q = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ (une fonction de production Cobb-Douglas). Soit une avance totale $C_0 = 300$. Soit les prix des facteurs $p_1 = 100$ et $p_2 = 200$. Optimiser cette production.

Réponse : Le Lagrangien est : $L = x_1^{1/3} x_2^{2/3} + \lambda (300 - 100x_1 - 200x_2)$

Vérification de la condition du premier ordre :

$$\partial L / \partial x_1 = 1/3 x_1^{-2/3} x_2^{2/3} - 100 \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\partial L / \partial x_2 = 2/3 x_1^{1/3} x_2^{-1/3} - 200 \lambda = 0 \quad (2)$$

$$\partial L / \partial \lambda = 300 - 100x_1 - 200x_2 = 0 \quad (3)$$

Le rapport des équations (1) et (2) donne (l'équation 4) $= (1/2) (x_2/x_1) = 1/2$; d'où : $x_1^* = x_2^*$

De l'équation (3) on tire $\delta L / \delta \lambda = 300 - 100x_1 - 200x_2 = 0 \Rightarrow 300 = 300x_1$ d'où $x_1^* = 1$ et $x_2^* = 1$.

(On suppose vérifiée la condition du second ordre)

Il est alors possible de déterminer le niveau optimal de la production $q = q^*$ en remplaçant par (x_1^*, x_2^*) . On trouve $(x_1^*, x_2^*, q^*) = (1, 1, 1)$ correspondant aux coordonnées de l'optimum

$\Omega (x_1^*, x_2^*, q^*) = (1, 1, 1)$. Il importe de retrouver les propriétés générales de l'optimum et montrer qu'elles sont vérifiées.

La fonction $q = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ a pour équation différentielle

$\delta q / \delta x_1 \delta x_2 = (1/3 x_1^{-2/3} x_2^{2/3}) dx_1 + (2/3 x_1^{1/3} x_2^{-1/3}) dx_2$. Cette différentielle totale est nulle le long d'un isoquant, soit : $(1/3 x_1^{-2/3} x_2^{2/3}) dx_1 + (2/3 x_1^{1/3} x_2^{-1/3}) dx_2 = 0$. Cette égalité est vérifiée pour :

$dx_2/dx_1 = - (1/3 x_1^{-2/3} x_2^{2/3}) / (2/3 x_1^{1/3} x_2^{-1/3}) = - x_2/2x_1$, et de plus la pente de la tangente à l'isoquant vérifie $d^2x_2/dx_1 = x_2/(2x_1)^2 > 0$, la décroissance du TMST.

III13) Minimisation de la dépense sous contrainte de production (M_{x2})

a) la méthode

Il s'agit cette fois de **minimiser la fonction d'avances** $C_0 = p_1x_1 + p_2x_2$, sous la contrainte q_0 ou $q^* = q(x_1, x_2)$, soit $q^* - q(x_1, x_2) = 0$.

Mathématiquement les conditions d'un minimum sont différentes de celles d'un maximum, mais on retrouve le même résultat et la même méthode. Il suffit de changer l'écriture du Lagrangien, et de modifier la condition du second ordre.

Soit

b) Exemple (suite) : Le Lagrangien s'écrit ici

$$L = 100x_1 + 200x_2 + \lambda(1 - x_1^{1/3} x_2^{2/3}) = 0$$

Condition du premier ordre :

$$\partial L / \partial x_1 = 100 - (\lambda/3 x_1^{-2/3} x_2^{2/3}) = 0 \quad (1)$$

$$\partial L / \partial x_2 = 200 - ((2\lambda/3) x_1^{1/3} x_2^{-1/3}) = 0 \quad (2)$$

$$\partial L / \partial \lambda = 1 - x_1^{1/3} x_2^{2/3} = 0 \quad (3)$$

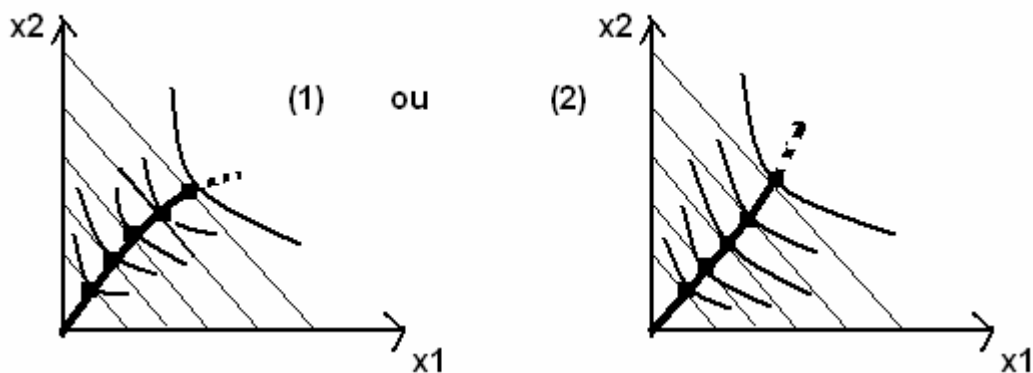
Le rapport des équations (1) et (2) $\frac{1}{2} = x_2/2x_1$ d'où $x_1 = x_2$, et selon (3) : $1 - x_1^{1/3} x_2^{2/3} = 0$ ce qui $\Rightarrow$ (puisque $x_1 = x_2$) $x_1 = 1$ et donc $x_2 = 1$.

On retrouve donc les résultats précédents. L'optimum $\Omega(x_1^*, x_2^*, q^*) = (1, 1, 1)$

Une définition importante en résulte :

on appelle « chemin d'expansion » (ou « sentier de croissance de la production » ou de « l'entreprise »), le lieu des points de tangence des droites de dépense parallèles (même rapport des prix) et des courbes d'égale production (isoquants) de l'entreprise.

La représentation du chemin d'expansion, en particulier sa forme, est cependant propre à chaque fonction. Une illustration est par exemple :



On reconnaît dans cette représentation une courbe identique à la courbe d'Engel étudiée dans la TNC_C. La détermination algébrique de **l'équation du sentier d'expansion** consiste donc :

- Soit à rechercher la *fonction implicite* de x_1 et x_2 , qui vérifie les conditions du premier et du second ordre remplies par la maximisation sous contrainte. Ce qui revient souvent à
- (Soit) à déterminer celle-ci directement à l'aide de l'égalité toujours vérifiée à l'optimum : $TMST = \text{rapport des productivités marginales} = \text{rapport des prix des facteurs}$. (Voir supra, on a bien alors deux variables, x_1 et x_2).

III14) Maximisation du profit (sans contrainte ou libre) : M_{x3}

La fonction de profit s'écrit : Profit = recette totale (ou chiffre d'affaires) – coût total, soit

$$\pi = (p \cdot q) - C \text{ et en remplaçant par les fonction correspondantes :}$$
$$\pi = p \times q(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2)$$

Le profit atteint un maximum si la fonction vérifie la condition du premier ordre :

$\delta\pi/\delta x_1 = \delta\pi/\delta x_2 = 0 \Leftrightarrow p \cdot q_1 = p_1$ et $p \cdot q_2 = p_2$ avec q_1 = la dérivée partielle de q par rapport à x_1 , donc *la productivité marginale du facteur x_1* ; et q_2 = la dérivée partielle de q par rapport à x_2 , donc *la productivité marginale du facteur x_2* . La condition du premier ordre se lit donc : **Le profit atteint un maximum lorsque la productivité marginale du facteur est égale à son prix**

On peut effectuer le rapport des productivités marginales : $[\partial\pi/\partial x_1 / \partial\pi/\partial x_2]$ et constater qu'il est égal au rapport des prix (p_1/p_2). C'est-à-dire :

$$\frac{\frac{\delta\pi}{\delta x_1}}{\frac{\delta\pi}{\delta x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

On en déduit que **l'extremum de profit est un optimum**, puisque la combinaison optimale de facteurs (x_1^*, x_2^*) est située sur le chemin d'expansion.

Les conditions du second ordre, pour que l'extremum de π soit un optimum, exigent que *les productivités marginales soient décroissantes*, et donc leur dérivée respective négative. On explique ceci dans le paragraphe suivant.

On verra au paragraphe suivant également, l'intérêt qu'il y a à exprimer les fonctions de « recette totale » et de « coût total » ou avances, **en fonction des quantités « q »**. Il devient notamment possible de maximiser le profit à l'aide d'une règle simplifiée, suivant laquelle **π Max $\rightarrow$ Coût marginal et recette marginale = p en situation de CPP.**

On conclut en rappelant que les résultats qui viennent d'être exposés (depuis II3 valent pour la longue période, ou lorsque x_1 et x_2 sont variables).

III2) Optimisation de la production, seconde approche : les fonctions de frais totaux et de coût unitaire

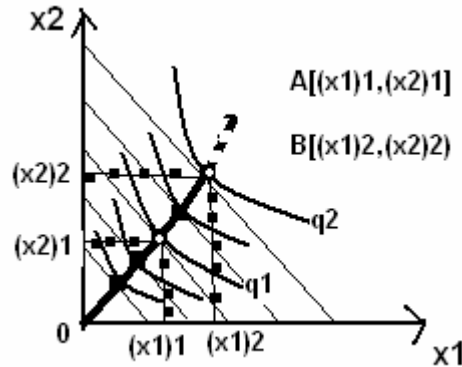
Dans cette seconde approche nous renversons la démarche suivie précédemment. De la détermination de la production optimale en vue d'un *minimum de coût* et d'un *maximum de profit*, nous passons à **la recherche d'un maximum de profit, dont la production est une conséquence** et non la cause. Ce passage est possible puisque l'optimum de la production est simultanément un optimum de profit. Toutefois la nouvelle démarche concrétise l'activité de l'entreprise, en intégrant les **fonctions de coûts**, ou plus proprement les fonctions de **frais totaux et de coûts unitaires**. Ces dernières jouent un rôle fondamental, ainsi que l'a montré un de leur initiateur A. Marshall. Ce rôle est identique à celui des fonctions de demande de la TNC_C, sauf qu'ici il s'agit d'une demande de facteurs. Elle nous mènent aussi à **la courbe d'offre de l'entreprise**.

Dans la suite on étudie donc ce que *coûtent* différents niveaux de production, puis ce qu'ils *rapportent* (les recettes et bénéfices), en distinguant longue et courte période. L'optimum de la production, ou la production retenue résulte, quelle que soit la période retenue, de la comparaison entre *couts* et *bénéfices*.

III21) La fonction de frais totaux de longue période

L'origine de ces fonctions peut être trouvée dans la notion et la représentation du *chemin d'expansion* qui est (voir supra) le lieu des optima de production à prix constants. Ce qui signifie qu'en chaque point (Ω) du sentier : la production est maximale (pour une avance donnée) ; l'avance est minimale (pour une production donnée) ; le profit est maximum. Les points A et B ci-dessous vérifient ces propriétés.

En chaque point (Ω) du sentier d'expansion le profit est maximum



Connaissant (x_1^*, x_2^*) , on exprime les fonctions de frais qui leur correspondent comme une fonction de la quantité produite. Ce sont les droites d'avance, les différents *isocoût*, parallèles car de même pente $(-p_1/p_2)$, qui traduisent la croissance des coûts avec les quantités produites. Dans la figure ci-dessus, passent par les points A et B, les *fonctions de frais* F_1 et F_2 qui s'écrivent respectivement :

$F_1 = p_1 (x_1)_1 + p_2 (x_2)_1$ (point A) < $F_2 = p_1 (x_1)_2 + p_2 (x_2)_2$ (point B) parce que $q_1 < q_2$.

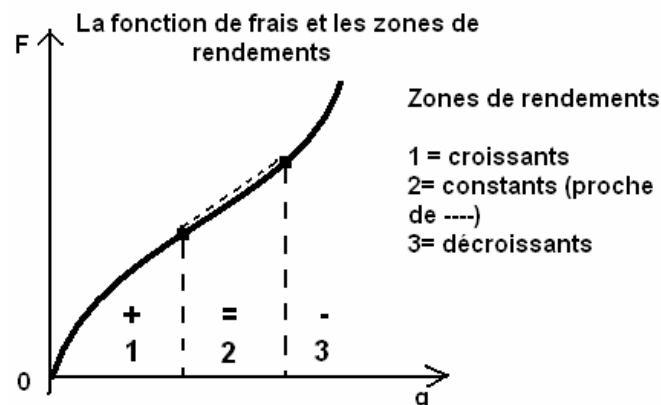
On peut déduire de ce constat une écriture de

**la fonction de frais : $F = F(q)$
et $dF/dq > 0$**

Les autres propriétés des fonctions de frais sont issues des rendements d'échelle.

- La fonction de production est à rendements d'échelle constants ($k=1$) ou *linéaire homogène*. Le sentier d'expansion est alors une droite. La fonction de frais est croissante proportionnellement à q .
- La fonction de production est à rendements d'échelle croissants ($k>1$). La fonction de frais est croissante ($dF/dq > 0$), mais de moins en moins ($d^2F/dq^2 < 0$).
- La fonction de production est à rendement d'échelle décroissants ($k<1$). Alors ($dF/dq > 0$ et ($d^2F/dq^2 > 0$).

La fonction type de la TNC_C est celle qui combine ces trois rendements d'échelle, en décrivant 3 zones de rendements. La fonction de frais possède alors la forme sinusoïdale ci-dessous :



III22) Les fonctions de coût (unitaire) de longue période

La fonction de frais, ou des avances totales, est nécessaire pour permettre le raisonnement à *la marge*. Ce raisonnement porte sur 1 unité de produit et non la totalité. Il permet de définir les deux notions de *coût* suivantes :

- Le coût par unité produite ou **coût moyen**
- Le coût par unité additionnelle ou supplémentaire ou **coût marginal**.

Alfred Marshall a montré que les courbes représentatives sont des **courbes en « U »**.

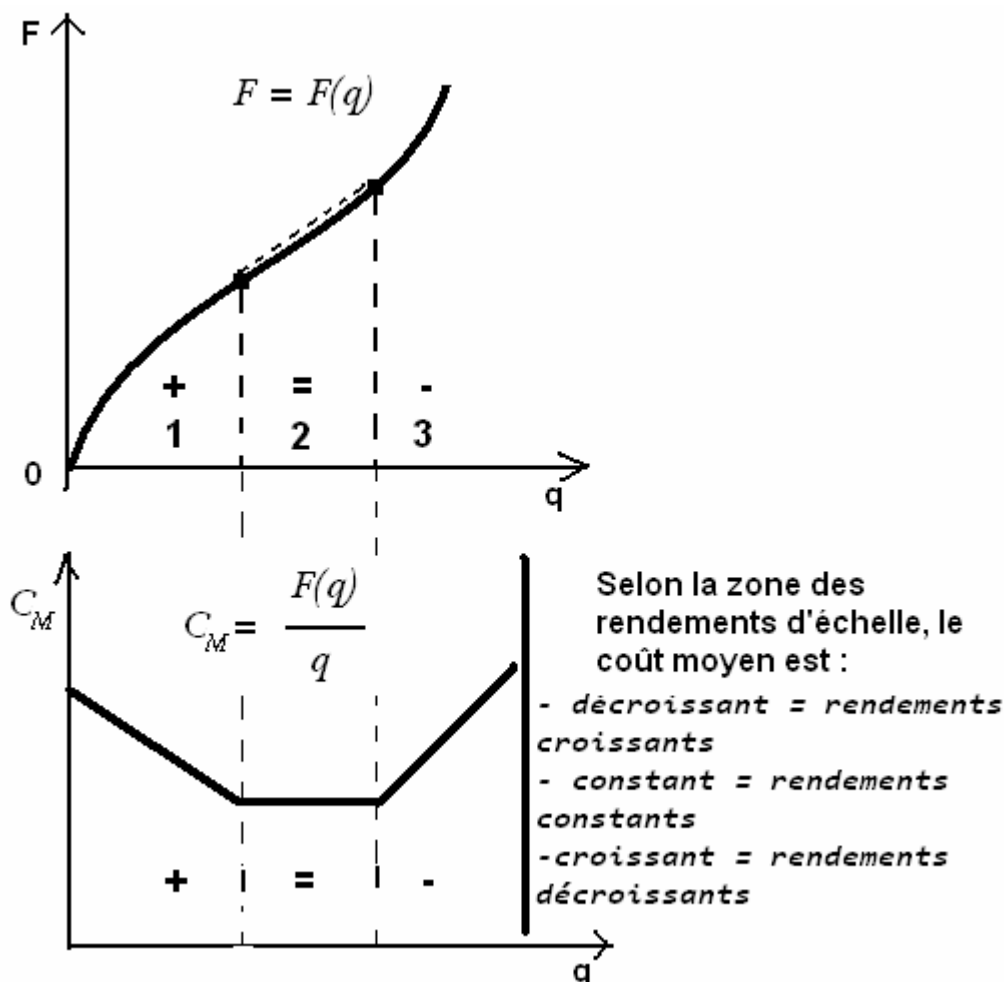
III221) Définition et représentation de la courbe de coût moyen (C_M)

$$C_M = F(q) / q$$

Le coût moyen pour un niveau de production q^* donné est égal au rapport des avances totales sur le nombre d'unités produites, soit $F = F(q)$.

Il va de soi que dans la longue période C_M converge vers $F(q)$, il devient coût total à mesure que croît la production q .

C'est à partir du raisonnement sur les rendements d'échelle exposé précédemment que l'on déduit **l'allure de la courbe de coût moyen**. En superposant le graphique représentatif de $F(q)$ et celui de $F(q)/q$ **on explique par les rendements la forme en « U » de la courbe de coût moyen**.



III222) Définition et représentation de la courbe de coût marginal (C_m)

Le coût marginal pour un niveau de production q^* donné est égal à la variation du coût exigée par celle d'une unité supplémentaire de produit. Il est donc égal à la dérivée de la fonction de coût total par rapport au quantités

$$C_m = F'(q) = dF(q)/dq$$

C'est un coût de longue période puisqu'il exige la variation des quantités utilisées des deux facteurs.

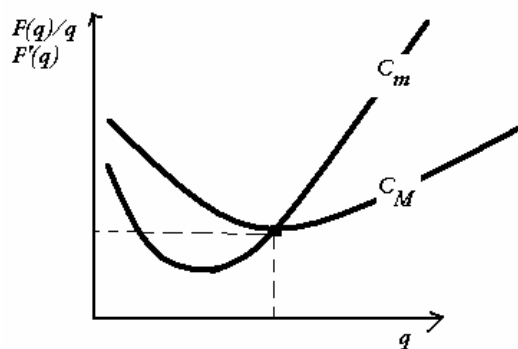
C'est également à partir du raisonnement sur les rendements d'échelle, exposé précédemment, que l'on déduit *l'allure de la courbe de coût marginal*. En superposant le graphique représentatif de $F(q)$ et celui de $F'(q)$ on explique par les *rendements la forme en « U » de la courbe de coût marginal*.

On obtient la même représentation que celle du coût moyen, à cette étape ci du raisonnement.

III223) Passage aux courbes en « U »

Tout en considérant les trois zones de rendement comme pertinente, il importe cependant de donner l'allure plus exacte des *fonctions de C_M et de C_m* . Elles ont l'allure en « U » ci-dessous, de laquelle ressortent les *points caractéristiques*.

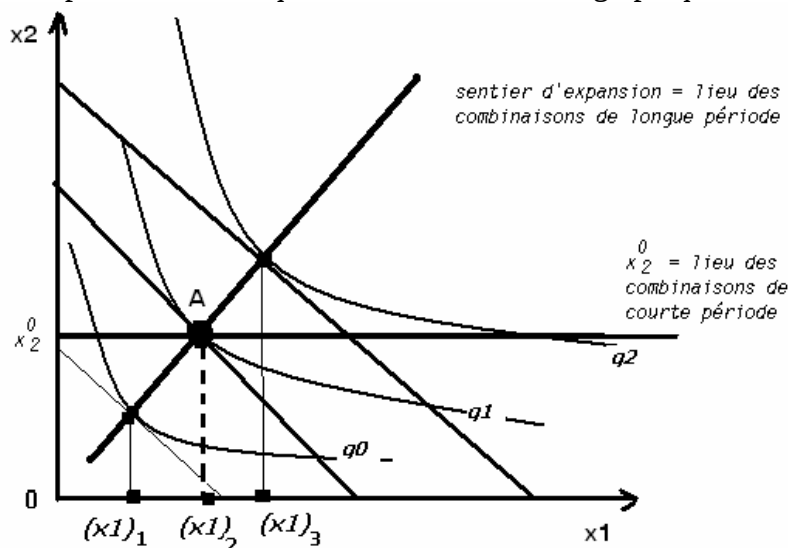
Courbes de coût moyen et de coût marginal en « U »



III23) Les fonctions de frais et de coût (unitaire) de courte période

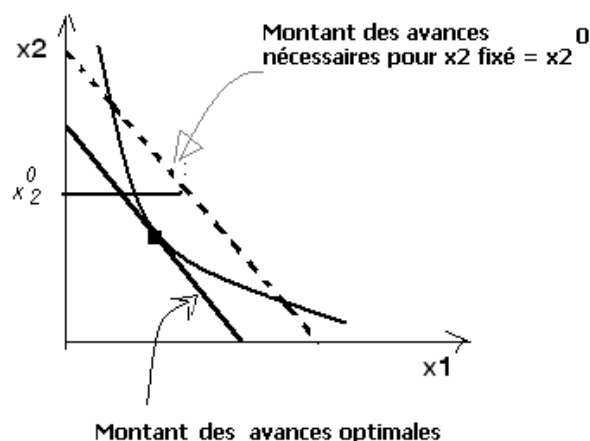
III231) La courte période, cas particulier de la longue période

Par définition il n'existe pas de chemin d'expansion en courte période (un seul facteur étant variable). Les combinaisons de facteurs ne sont optimales qu'en un seul point, et apparaissent comme autant de cas particuliers. Ce que l'on constate dans le graphique ci-dessous :



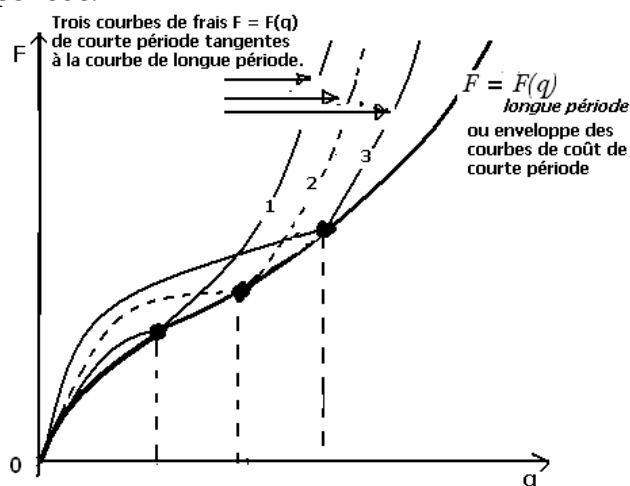
Les combinaisons optimales de courte et de longue période diffèrent. Elles se situent en longue période le long du sentier d'expansion, et (par exemple) sur la droite d'ordonnée $x_2^0 =$ constante, qui coupe le chemin au point (A) d'abscisse $(x_1)_2$. On dira qu'en courte période, il y a une identité des combinaisons optimales : $(x_2^0, (x_1)_2)$ et (x_2, x_1) .

Ainsi, pour x_2 fixé, tout autre optimum situé à un niveau de production supérieur, exige une augmentation des avances. Soit la représentation :



Le montant des frais de courte période est toujours supérieur au montant de longue période, pour un même niveau de production, sauf en un point correspondants à x_2^0 fixé, où elles sont égales.

Une succession de plusieurs courbes de coût de courtes périodes et donc de plusieurs points d'égalité, permet, par le théorème de l'enveloppe de déterminer la courbe de frais de longue période.



Maths
Une courbe Γ est l'enveloppe des courbes C_k (famille de courbes à un paramètre définie par l'équation $C_k = f(q, k)^k$), si elle est tangente à toute courbe C_k en un ou plusieurs points appelés « points caractéristiques ».

III232) Les dépenses de courte période

Le tableau ci-dessous recense les types de dépenses :

Type de dépenses	Longue période	Courte période
Selon (q)	Frais totaux de production Coût unitaire ou C_M Coût marginal ou C_m	
Selon la période	Coûts variables	Coûts variables Coûts fixes

La courte période présente une problématique des coûts plus complexe, puisqu'elle reprend les types de coûts de longue période en ajoutant la **distinction entre coûts variables et coûts fixes**. On considère en effet qu'en longue période l'ensemble des coûts varient, et donc qu'il n'y a pas de frais fixes.

Les fonctions de coûts de courte période sont alors les suivantes :

La fonction de frais : $F = \varphi(q) + b$ où : $\varphi(q)$ désigne la partie variable des frais, et b , la partie fixe. Si on suppose l'un des facteurs fixe ($x_2 = x_2^0$) alors le montant des coûts fixes est donné par ($p_2 \cdot x_2^0$).

Le coût variable moyen : $CVM_{(q)} = [\varphi(q)]/q$

Le coût total moyen : $CTM_{(q)} = [\varphi(q) + b]/q$. Le coût total moyen comprend donc le $CVM_{(q)} = \varphi(q)$ et le coût fixe par unité, soit (b/q) (à distinguer des frais fixes qui apparaissent dans $F = \varphi(q) + b$, et qui sont indépendants des unités..

Le coût marginal : $Cm_{(q)} = d\varphi(q)/dq = \varphi'(q)$

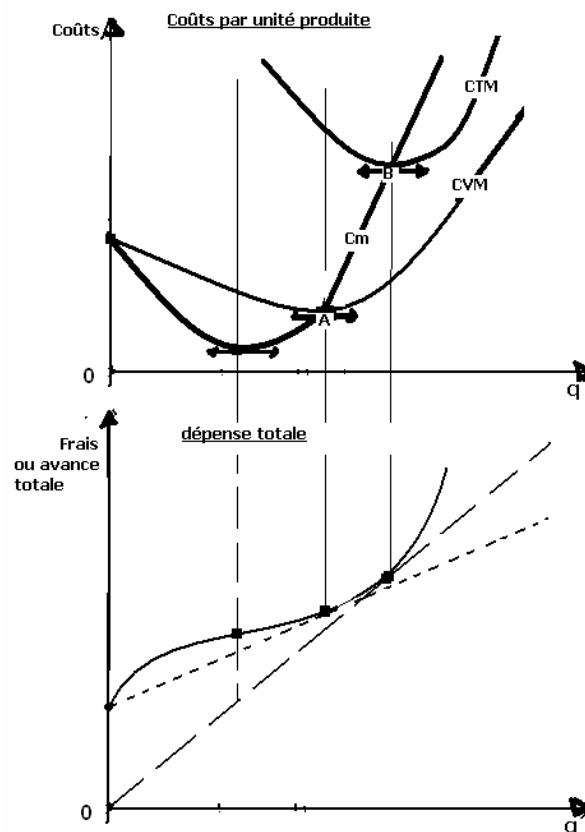
III233) Les relations entre les coûts de courte période

III2331) Présentation géométrique

Les fonctions de coûts de courte période

$$F = \varphi(q) + b \quad CVM_{(q)} = [\varphi(q)]/q \quad CTM_{(q)} = [\varphi(q) + b]/q \quad Cm_{(q)} = d\varphi(q)/dq$$

donnent lieu à une représentation graphique où apparaissent les relation entre les points significatifs des fonctions. Le graphique supérieur représente les fonctions de coûts par unité produite (sauf b/q , le coût fixe) et le graphique inférieur, l'évolution de la dépense totale.



III2332) Commentaire des relations graphiques

I

Commentaires : les relations apparentes dans le graphique supérieur :

- CVM et CTM se rapprochent à mesure de la croissance de q . Ceci est dû au phénomène de la décroissance du coût fixe par unité, à mesure de la croissance de q . Par exemple si $b = 1000\text{€}$, et la production $q = 10$, alors le coût fixe $b/q = 100$ par unité ; si q passe à 20, $b/q = 50$ etc..
- C_m et CVM suivent une évolution parallèle remarquable, illustrée par leur pente respective :
 - o Le coût marginal décroît plus vite que le coût variable. Ceci est dû au *phénomène de croissance de la productivité marginale du facteur*. La relation entre productivité et coût est en effet « inverse » : hausse de la productivité baisse de coût.
 - o Lorsque les deux croissent, le C_m croît plus rapidement que le CVM. L'explication est identique et concerne cette fois *la décroissance de la productivité marginale*.
 - o Le C_m est égal au CVM *lorsque celui est à son minimum*. En ce point l'usage du facteur x_1 est tel que *sa productivité marginale égale sa productivité moyenne*. Egalité déjà évoquée plus haut et démontrée ci-après.
 - o C_m atteint son minimum avant CVM. La productivité marginale est en effet inférieure à la productivité moyenne.
- C_m et CTM : la courbe de C_m coupe celle du CTM en son minimum, mais pour une valeur de (q) supérieure à celle du CVM.

III2333) Démonstration algébrique des relations

a) **Le C_m et le minimum de CVM et de CTM.**

b)

Pour démontrer que la courbe de coût marginal coupe CVM et CTM en leur minimum, il suffit d'annuler les dérivées de ces deux dernières fonctions, soit :

$CVM = \varphi(q)/q$, le CVM est *minimum* lorsque la *dérivée du coût est nulle*, soit :

$d/dq [\varphi(q)/q] = 0$ par application du théorème déjà vu, $(vu' - u'v)/v^2 = 0$, on a :

$$[[\varphi'(q)]q - \varphi(q)]/q^2 = q [\varphi'(q) - \varphi(q)/q]/q^2 = 1/q [\varphi'(q) - \varphi(q)/q] = 0$$

On reconnaît dans cette dernière écriture : $\varphi'(q)$, le *coût marginal*, et $\varphi(q)/q$, le CVM. La dérivée du CVM s'annule donc au point où

$C_m = CVM$. Ce point est appelé « *seuil de fermeture* »

Même chose pour CTM, dont la dérivée est : $d/dq [(\varphi(q) + b)/q] = 0$, soit $\varphi'(q)q - [\varphi(q) + b] = 0$

D'où : $1/q [\varphi'(q) - (\varphi(q) + b)/q] = 0$.

On reconnaît dans cette dernière écriture : $\varphi'(q)$, le *coût marginal*, et $\varphi(q) + b$, le CTM. La dérivée du CTM s'annule donc au point où

$C_m = CTM$. Ce point est appelé « *seuil de rentabilité* »

c) croissance et décroissance des courbes de C_m et de CVM

Si C_v est le coût variable, alors $C_v = \varphi(q)/q$ et donc le coût total = $q \times C_v$

On en déduit la différentielle du coût total : $d\varphi = C_v (dq) + q(dC_v)$. On peut alors écrire une nouvelle expression du coût marginal, puisque ici $d\varphi/dq = C_v + d[dC_v/dq]$. Partant de celle-ci on remarque :

- $C_m < C_v$ lorsque C_v décroissant (soit $dC_v/dq < 0$)
- $C_m = C_v$ lorsque C_v Minimum (soit $dC_v/dq = 0$)
- $C_m > C_v$ lorsque C_v croissant (soit $dC_v/dq > 0$)

Les variations propres au coût marginal sont les suivantes : sa dérivée s'écrit :

dC_m/dq est la dérivée de $d\varphi/dq = C_v + d[dC_v/dq]$. Elle s'écrit : $dC_m/dq = dC_v/dq = (dC_v/dq) + (1 \times dC_v/dq) + (q \times d^2C_v/dq) = 2 dC_v/dq + q (d^2C_v/dq)$. Le minimum du C_m est atteint au point où sa dérivée première s'annule, soit lorsque $q = q_0$, tel que $dC_v/dq = d^2C_v/dq = 0$. Après ce point q_0 , on observe que dC_v/dq et (d^2C_v/dq) sont > 0 , alors **le C_m est croissant**.

Cette démonstration de l'existence d'une partie croissante du C_m est essentielle, car elle est l'une des conditions de réalisation **d'un profit maximal, et de plus explique la courbe de l'offre de l'entreprise (voir plus loin)**. Mais, rappelons le, elle n'est que le reflet de la décroissance de la productivité marginale du facteur.

III24) Les fonctions de recettes.

Après l'étude des coûts, vient logiquement celle des recettes résultant des ventes de la production q au prix du marché « p ». La recette est d'abord la *Recette Totale* (R) ou *Chiffre d'affaires* (ou CA). La recette totale (R) est le produit des quantités produites par le *prix unitaire de l'output*.

$$\text{Recette totale} = R = p \times q$$

On définit la *recette marginale* (R_m), comme la recette supplémentaire résultat de la production d'une unité additionnelle d'output. Mathématiquement elle est la dérivée de la recette totale.

Recette marginale = $R_m = dR/dq$.

Si $R = p \times q$, en différenciant on a : $dR = p dq + q dp$

et alors $dR/dq = p + q (dp/dq)$.

Comme on raisonne en CPP, la production de l'entreprise ne peut à elle seule infléchir le prix de marché « p », et donc le terme $(dp/dq) = 0$. On en déduit alors que :

En concurrence pure et parfaite la recette marginale est toujours égale au prix de marché « p »

Le prix étant une donnée, il existe dans le plan ($0qp$), une droite d'ordonnée $y = p_0$, constante, qui représente la *courbe de demande à l'entreprise*. Aussi, au prix $p = p_0$ la demande qui s'adresse à l'entreprise est *infiniment élastique*, ou absorbera toute la production (à ce prix).

III3) Optimisation de la production : Comportement effectif de production et maximisation du profit.

On définit l'équilibre du producteur comme le point où le niveau de production atteint permet la réalisation du profit maximum.

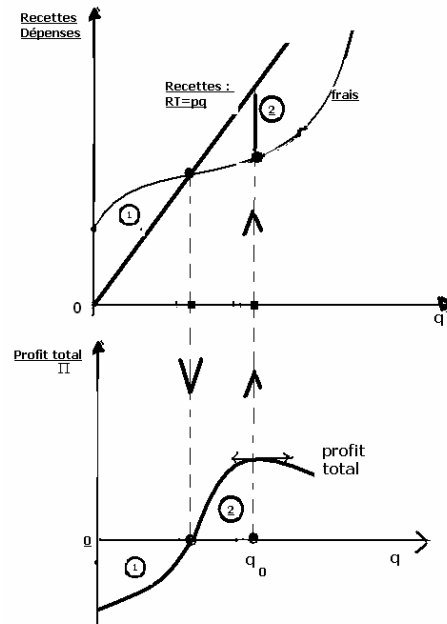
On appelle *comportement effectif de production*, le choix par l'entreprise d'une offre optimale. Le **comportement effectif est donc celui de la détermination de l'offre.**

III31) Coûts, recettes et profit maximum

Soit la fonction de production à deux facteurs $q = f(x_1, x_2)$. La contrainte de coûts s'écrit $C = p_1x_1 + p_2x_2$. Elle est aussi décrite pour p_1 et p_2 donnés par la fonction de frais : $F = \varphi(q) + b$, laquelle comporte en courte période les frais fixes (b). Ceci forme la *dépense* nécessaire. Nous connaissons par ailleurs la fonction de recette totale : $R = p \times q$.

III311) Relation entre Recettes, dépenses et profit maximum

Graphiquement nous superposons en conservant l'abscisse (q), en ordonnée (Recettes, dépenses), graphique supérieur, et (profit total ou Π), graphique inférieur.



Dans le graphe supérieur la droite de recettes a pour pente le prix « p ». En posant $p=1$, et en supposant la même échelle en abscisse et en ordonnée, *la droite de recette est normalement la première bissectrice des axes*. Ici on a supposé un prix $p>1$. La droite a donc subi une rotation autour de l'origine 0, vers la gauche. On aurait pu supposer une rotation vers la droite, traduisant une baisse du prix. La fonction de frais a pour ordonnée à l'origine une avance initiale C différent de 0 pour $q=0$.

Il se dégage alors que la zone -1- où $R < F$ est celle des « profits négatifs (ou pertes), tandis que la zone 2 où $R > F$ est celle des profits positifs.

Le graphe inférieur traduit cette variation du profit total, en fonction des quantités. On lit que le profit est négatif, puis positif, pour atteindre un maximum en q_0 .

Ce maximum est atteint au point où $d\Pi/dq = 0$ et $d^2\Pi/dq^2 < 0$.

Les conditions de maximisation du profit peuvent être précisées.

Soit $F(q) = \varphi(q) + b$

Et $\Pi(q) = R - F = pq - (\varphi(q) + b) \rightarrow d\Pi/dq = p - \varphi'(q) = 0$, soit $p = \varphi'(q) \Leftrightarrow \text{Prix} = C_m$.

La condition du premier ordre de maximisation du profit est donc **l'égalité du coût marginal avec le prix de vente**.

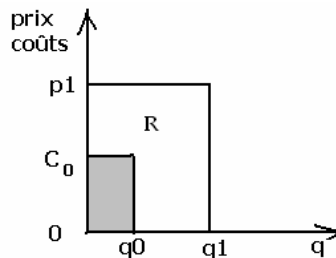
La condition du second ordre s'écrit : $d^2\Pi/dq^2 = -\varphi''(q) < 0$ ou $\varphi''(q) > 0$. La condition du second ordre est que la dérivée du C_m soit croissante, et donc que *le coût marginal soit décroissant*. Ce qui signifie que la productivité marginale du facteur doit être décroissante.

III312) La surface de profit

A l'aide d'un graphique complémentaire il est possible d'analyser géométriquement le profit total comme une *aire* ou *surface*.

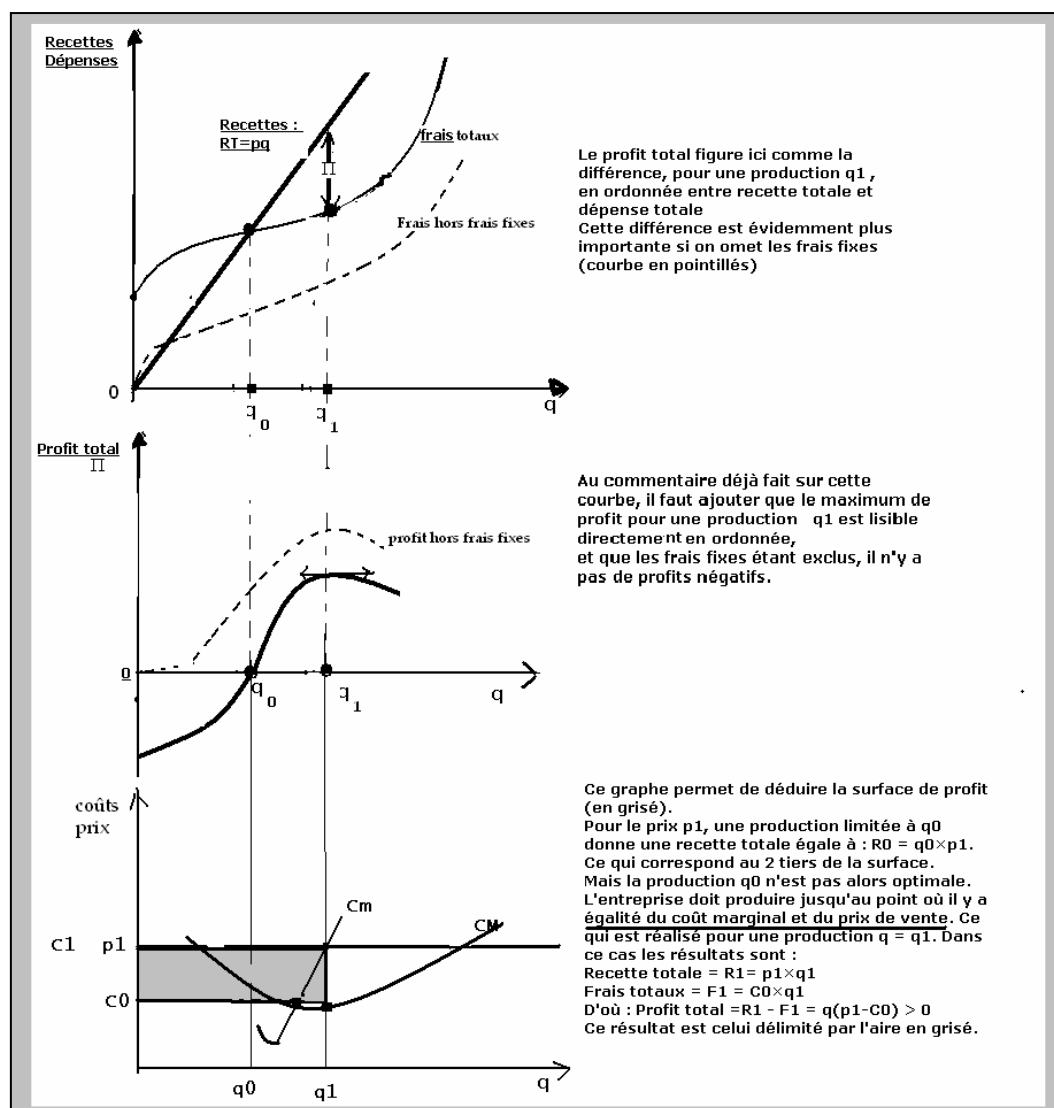
On peut introduire celle-ci par un graphe (0,q, p et coûts) de définition :

Les valeurs C_0 et p_1 , et donc q_0 et q_1 sont arbitraires



dépense totale = Aire égale à $(C_0 \times q_0)$
 recette totale obtenue sur q_1 = Aire de volume $(p_1 \times q_1)$

La relation entre l'aire de profit, la dépense, les recettes et le profit total est construite en superposant trois graphiques :



Le graphique inférieur montre comment la règle d'égalisation du C_m avec le prix de marché (au point de coordonnées (p_1, q_1)) gouverne la surface de profit. En ce point le minimum du

coût moyen (C_M) est légèrement dépassé, tandis que le C_m avait déjà coupé le C_M au seuil de fermeture.

III32) Optimisation de la production : *Capacité* de production et *maximisation du profit* : **la longue période**

La spécificité de la longue période en matière de coûts est, on l'a vu, le fait que **la fonction de frais totaux ne comporte que des frais variables**. Aussi, lorsqu'il envisage ces frais en relation avec plusieurs niveaux potentiels de production, et avec le *prix de marché* du produit, l'entrepreneur cherche à **déterminer une capacité optimale de production, celle qui lui assure le profit maximal**.

C'est donc la maximisation du profit qui est la méthode la plus appropriée.

On sait que la fonction de frais de longue période se résout mathématiquement à l'équation du *sentier d'expansion*. (voir supra). Elle s'écrit $F(q)$.

Le profit a toujours la même équation : $\Pi = \text{recettes} - \text{frais} = (p \times q) - F(q)$

Le profit est maximum si $(d\Pi/dq) = p - F'(q) = 0$ et si $d^2\Pi/dq^2 = -F''(q) < 0$, soit si $F''(q) > 0$.

Les conditions de maximisation sont celles de la courte période ($p = C_m$, voir supra).

Mais **Remarque** : Selon les exercices, la maximisation du profit peut prendre d'autres formes, ou emprunter d'autres voies. L'une des plus usitées est la règle de maximisation :

la productivité marginale en valeur de chaque facteur de chaque facteur doit être égale à son prix unitaire, soit : $(p \times Q'_L) = w$ et $(p \times Q'_K) = r$

Cette règle s'énonce aussi (par simple transformation mathématique) : *la productivité marginale de chaque facteur doit être égale à son prix réel*.

Soit : $Q'_L = w/p$ et $Q'_K = r/p$,

les membres de droite de chaque équation sont dits réels, car la valeur nominale du numérateur est rapportée au prix.

On utilise les expressions *maximisation indirecte* et *maximisation directe du profit* pour désigner les deux méthodes : $\text{Prix} = C_m$ et $Q'_L = w/p$ et $Q'_K = r/p$

La différence, est qu'en longue période, la définition des fonctions des frais et coûts *dits de longue période*, utilise le théorème de l'enveloppe. Celui ci s'applique, on l'a vu, à la fonction de frais, mais aussi au coût marginal (voir exercice N° 9).

Ceci permet à l'entrepreneur de déterminer dans l'ordre : Une capacité de production, c'est-à-dire une combinaison de facteurs (x_1 et x_2) occasionnant des frais. A une capacité de production correspond *un seul niveau de production optimal* (lié à la combinaison de facteurs choisie). Cependant l'entreprise, une fois créée, l'entrepreneur peut suivant le prix de marché (p) envisager d'autres capacités de production.

III4) La fonction d'offre de longue période

Des enseignements précédents il découle qu'à un certain montant de profit, lié à un certain prix de marché, correspond une fonction d'offre de l'entreprise. Ce profit peut être >0 , $=0$, ou <0 . Selon la période considérée l'entrepreneur décide alors soit de produire, soit de ne pas produire.

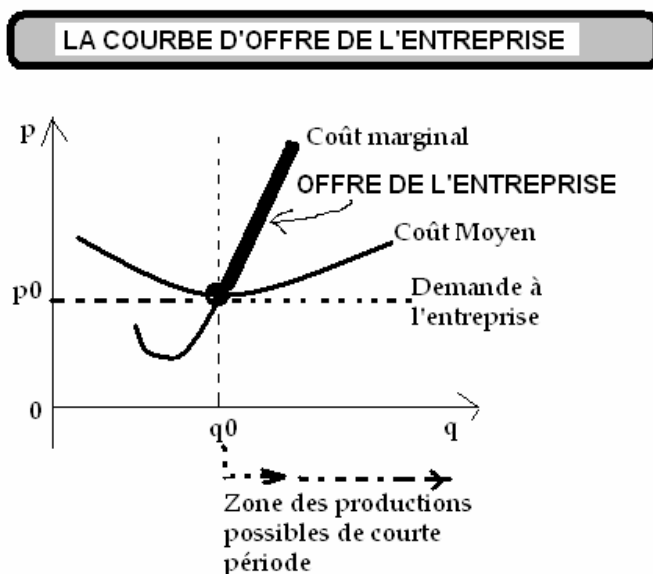
III41) Principe de détermination de l'offre de l'entreprise individuelle (i)

III411 : Enoncé du principe $C_m = p$

Pour un prix donné par le marché (p), l'entreprise offre la production pour laquelle le coût marginal est égal à ce prix. En courte période l'entreprise ne cherche à couvrir que ses frais variables (puisque $x_2 = x_2^0$). On dira alors que **le prix minimum** auquel l'entreprise commencera à produire est celui correspondant à la demande à l'entreprise tangente à sa courbe de coûts variables. Il correspond à l'équilibre de l'entreprise.

III412) : Graphique et explicitation du principe

Le graphique illustratif du principe de la détermination de l'offre individuelle est le suivant :



La demande à l'entreprise peut varier entre p_0 et p (en ordonnées). Aussi pour tout prix supérieur à p_0 , l'entreprise produit selon le principe de l'égalité $C_m = p$. En courte période, la fonction d'offre de l'entreprise est donc la partie croissante de son coût marginal situé au-dessus du minimum du coût variable.

Soit l'entreprise z et soit $\Phi_z(q_z)$ sa fonction de frais variables (et non F). Le coût marginal de z , est la dérivée de $\Phi_z(q_z)$, soit : $\Phi'_z(q_z)$.

La condition d'équilibre du premier ordre est : $C_{m(z)} = \Phi'_z(q_z) = p^*$, avec p^* le prix de marché.

On considère que cette égalité d'équilibre donne une expression du prix en fonction des quantités produites, puisque (à gauche) $C_{m(z)}$ est fonction de q_z . Il faut alors résoudre l'équation en q_z , pour obtenir la quantité comme fonction du prix (voir l'exemple ci-dessous). On obtient alors la fonction d'offre de l'entreprise, qui s'écrit ici : $q_z = f_z(p^*)$ et pour tout $p < p^*$ (celui qui correspond à la production minimale), alors $q_z = f_z(p^*) = 0$.

III413) : La fonction d'offre en longue période

Le principe de construction ne change pas. Une fois de plus, la différence porte sur la définition des coûts, en particulier *le coût marginal de longue période*. Le prix minimum correspondant au *coût marginal*, puisque tous les facteurs varient, intègre *l'amortissement de l'équipement*.

III414) La courbe d'offre : un exemple :

$$\text{la fonction } F_z = 0,1q_z^3 - 2q_z^2 + 15q_z$$

Soit la fonction de frais variables de l'entreprise « z » : $F_z = 0,1q_z^3 - 2q_z^2 + 15q_z$

Calcul du coût marginal, $C_{m(z)} = (d/dq_z) F_z = 0,3q_z^2 - 4q_z + 15$

Le maximum de profit est atteint au point où $p = C_m$ (condition du premier ordre). Soit :

$p = 0,3q_z^2 - 4q_z + 15$ Sous cette forme l'équation se résout en « p ». Or, ce n'est pas ce que l'on cherche, mais plutôt les quantités optimales (q_z). D'où : $0,3q_z^2 - 4q_z + 15 - p = 0$.

Ce polynôme caractéristique du second degré en « q » a pour discriminant (en omettant les indices) : $\Delta' = b'^2 - ac = 4 - 0,3(15-p) = 4 - 4,5 + 0,3p = 0,3p - 0,5$. Le discriminant $\Delta' \geq 0 \Rightarrow p \geq 5/3$

Si $\Delta' = 5/3$, il existe deux solutions en « q », notées q_1 et q_2

$$q_1 = b' - \text{rac}[\Delta]/a = 2 - \text{rac}[0,3p - 0,5]/0,3 \text{ et } q_2 = b' + \text{rac}[\Delta]/a = 2 + \text{rac}[0,3p - 0,5]/0,3$$

Les solutions, et donc *la fonction d'offre*, dépendent donc de p. La construction de la fonction d'offre commence par le calcul du prix « p » pour lequel l'entreprise consentira à offrir. Ce prix, minimum, est celui pour lequel l'entreprise couvre tous ses frais.

La fonction de frais est $F_z = 0,1q_z^3 - 2q_z^2 + 15q_z$. Le coût variable par unité (CV_M) est

$[F_z/q] = [0,1q_z^3 - 2q_z^2 + 15q_z]/q = 0,1q^2 - 2q + 15$. Le *minimum du coût variable est atteint au point où* : $d/dq(F_z/q) = 0,2q - 2 = 0$, ce qui est vérifié pour $q=10$.

Ainsi en produisant 10 unités, l'entreprise couvre tous ses frais, au prix $p = CV_M$, dont la valeur est (en remplaçant) $p = CV_M = (0,1 \times 100) + (2 \times 10) + 15 = 5$.

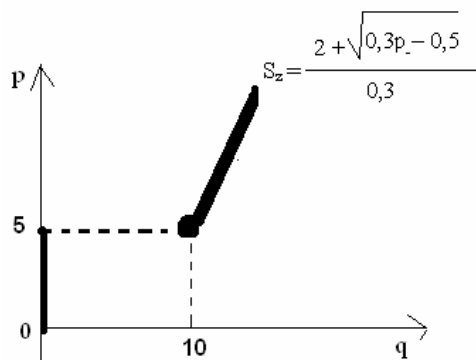
Par conséquent : pour un prix $p=5$, l'entreprise offrira une production de 10 unités. En deca elle n'offre rien. Ce qui donne un premier segment de la courbe représentative de l'offre.

L'autre segment de la courbe est la représentation de la fonction q_1 ou q_2 , dont la solution est $q=10$ si $p=5$. C'est la fonction $q_2 = 2 + \text{rac}[0,3p - 0,5]/0,3$ car si $p=5 \Rightarrow q_2 = 2 + \text{rac}[1,5 - 0,5]/0,3 = (2+1)/0,3 = 10$

Soit au total, la fonction d'offre de l'entreprise que l'on écrit fréquemment S_z (avec S pour *supply*) . Si $p < 5$ alors $S_z = 0$ et si $p \geq 5$ alors $S_z = 2 + \text{rac}[0,3p - 0,5]/0,3$.

La représentation graphique (approximative) est la suivante, dans le repère (0,q pour S, p).

Construction de la fonction d'offre :
l'exemple de la fonction de frais :
 $F_z = 0,1q^3 - 2q^2 + 15q$



Entre l'écriture de la fonction d'offre et sa représentation, on remarque une inversion normale entre prix et quantité. La fonction représentée est en fait une fonction du type $p = f(q \text{ ou } S)$.

On doit en effet déterminer celle-ci pour les besoins de la représentation graphique. La fonction obtenue est alors appelée, dans la terminologie de A. Marshall, *fonction de prix d'offre*.

IV) Quelques développements de la TNCp : Concurrence imparfaite ; Economies et déséconomies externes

IV1) Développement -1 - : La concurrence imparfaite

Ce sont **A.A Cournot** (1838 : *Recherches, chap V*) et **Joseph Bertrand** (1883) qui ont initié l'analyse de la détermination des prix en situation de concurrence imparfaite. Leur analyse portait sur le monopole et surtout le **duopole**. La théorie de la concurrence imparfaite fera ensuite de notables progrès avec **l'Ecole de Cambridge**, à la suite d'A. Marshall (s'illustreront : Chamberlin, Mss Robinson, Sraffa etc...).

IV11) Définition de la concurrence imparfaite

On peut définir la CIP par l'absence de l'une au moins des cinq conditions de la CPP. On constate alors que plus on relâche les hypothèses ou conditions, plus le modèle étudié se rapproche de l'observation réelle de l'activité des firmes. On aboutit toutefois à une large variété de situations, que les auteurs ont regroupées sous des catégories de concurrence (ou de marchés), généralement présentées dans le tableau simplifié suivant :

Offre / Demande	Nombre de vendeurs		
	un seul	plusieurs	Deux
un acheteur	Monopole bilatéral	Monopsone	
une infinité	Monopole	Oligopole	Duopole

On définit alors la *concurrence imparfaite* par chacune de ces catégories de la concurrence. Elles ont un point commun : **dès lors que la concurrence est imparfaite, la méthode d'optimisation de la production et celle de la maximisation du profit diffèrent de la CPP.**

On donne ci-dessus les modifications importantes lorsque le marché est en situation de **Monopole**, d'une part, puis en **situation oligopolistique limitée à 2 vendeurs**, soit en **duopole**.

IV12) Maximisation du profit en situation de monopole

IV121) Définition

On appelle « monopole » une situation de marché limite (ou *monopole pur*), caractérisée par *un producteur unique*, d'un bien *homogène* (qualité unique), et *une infinité d'acheteurs*.

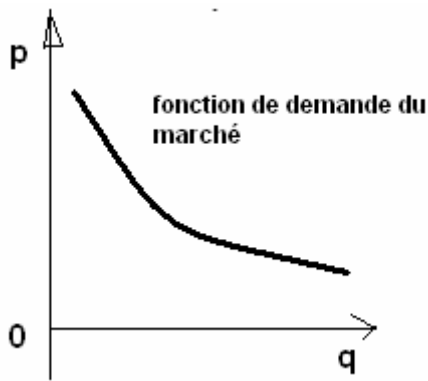
La caractéristique essentielle du monopole est d'être un *price maker* (ou faiseur de prix) et de satisfaire une demande plus ou moins *flexible*.

IV122) La demande

Tandis qu'en CPP, l'entreprise considère la fonction du prix de demande comme une donnée qui s'impose à elle sous la forme d'une *demande à la firme*, soit $p = f(q)$ donné, le monopole reçoit une demande dite *demande du marché qui est fonction décroissante du prix*, soit : $q = f(p)$ sachant que p est fixé par le monopole. Cette demande *du marché* est une **demande agrégée** (tous les demandeurs) puisqu'il n'y a qu'un seul vendeur.

La souveraineté du monopole s'étend donc du *prix* aux *quantités*, puisqu'il peut agir sur les quantités demandées.

La fonction de demande peut être linéaire ou non. Dans ce dernier cas, elle peut être illustrée de la manière suivante :



IV123) Les recettes ou chiffre d'affaire du monopole

On connaît les définitions de R_T , R_M , et R_m , les recettes totale, moyenne et marginale.

On sait qu'en CPP la recette marginale est égale au prix (l'unité produite additionnelle procurera une recette unitaire égale au prix du marché imposé, soit p).

On retient alors que l'essentiel est : **en situation de monopole, la recette marginale n'est plus confondue avec le prix (ou recette par unité vendue, ou recette (moyenne), soit $R_m \neq p$ (ou R_M)**

Ainsi en posant que la courbe de demande est de forme linéaire et du type $q=f(p)$, on peut écrire la fonction : $q = A - Bp$ où A et B sont des paramètres positifs.

Soit les équations de définition de $R_T = p \times q$, $R_M = (p \times q)/q$, et $R_m = dR_T/dq = d(p \times q)/dq$

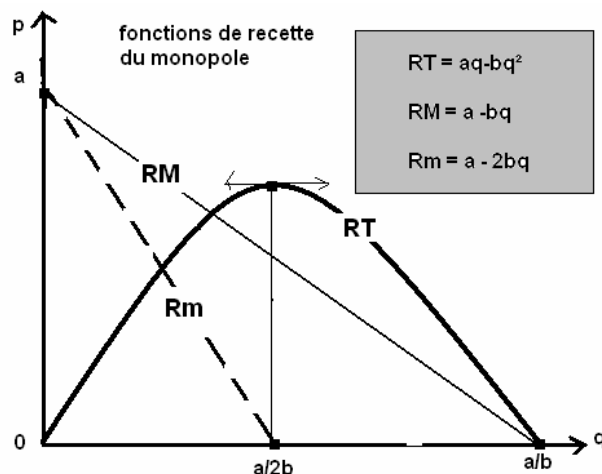
On a alors :

$R_M = (p \times q)/q = p$ comme $q = A - Bp$ alors $p = (A/B) - (q/B)$, et en appelant $A/B = a$ et $(1/B) = b$ $R_M = a - bq$. Graphiquement (voir ci-dessous) la droite de R_M a pour ordonnée à l'origine (a) et pour abscisse à l'origine (si $p=0$) le rapport a/b (dédit de $q=A-Bp$ avec $p=0$).

$R_T = p \times q = (a - bq) q = aq - bq^2$. Graphiquement elle est représentée par une parabole tournant sa concavité vers le bas. Les points significatifs étant : $(p,q) \rightarrow (0,0)$; (P_{Max}) ; $(0, a/b)$ puisque $p = q(a-bq) \rightarrow$ si $q=a/b$ alors $p=0$. Le maximum (p_{max}) est atteint au point $dR_T/dq = 0$ soit $a-2bq=0 \rightarrow q=a/2b$

$R_m = d(p \times q)/dq = a-2bq$ qui diffère de $R_M = p = a - bq$. La courbe de recette marginale est donc une droite, dont l'ordonnée à l'origine est a (si $q=0$), et l'abscisse à l'origine est $(a/2b)$ (si $p=0$).

Le droite R_m entretient les relations suivantes avec R_T : la recette totale est maximale lorsque la recette marginale s'annule. On vient de voir que $R_m = 0$ pour $(a/2b)$.



IV124) La maximisation du profit

La règle :

Le profit $\Pi = R_{T(q)} - C_{T(q)}$. Il atteint un extremum au point où : $d\Pi/dq = 0$,

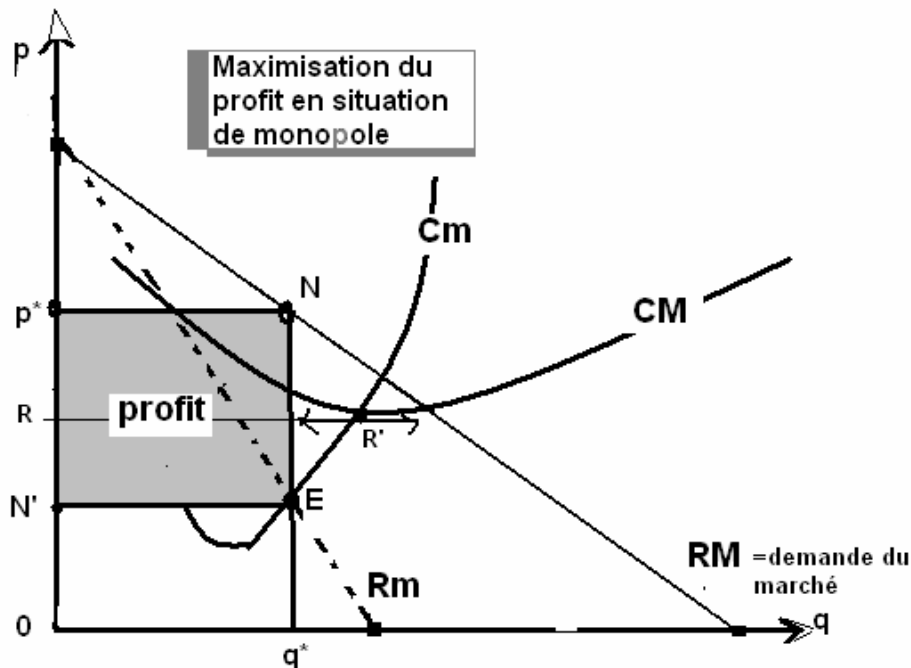
soit lorsque $R_m = C_m$

lorsque la recette marginale est égale au coût marginal

On obtient ainsi le niveau $q=q^*$, de production optimal qui maximise le profit.

Le graphique et la différence avec la CPP :

Dans la lecture du graphique il importe d'insister sur la droite de **demande du marché** (R_M), dont le rôle est essentiel.



On observe les relations qui s'établissent entre les 4 courbes : Recettes : R_M et R_m ; et coûts : CM et C_m .

On sait qu'à l'optimum, le monopole égalise $R_m = C_m$. Cet équilibre ou optimum est ici représenté par le point E (correspondant en ordonnée à un prix N'). En translatant E vers le haut on obtient le point N, de rencontre avec la R_M , c'est-à-dire le *prix unitaire d'équilibre qu'exige le monopole*, repéré en ordonnée par « p^* ». On peut imaginer que R_M ait une pente moins forte et donc que le point N (et donc p^*) soit situé plus haut. L'élasticité de la demande du marché par rapport au prix du monopole joue donc un rôle essentiel. En translatant E vers le bas on obtient q^* , les quantités d'équilibre.

Ainsi, alors que le prix de vente actuelle est p^* , le monopole possède un *seuil de rentabilité* (ou *prix minimum à partir duquel il peut faire des profits*), inférieur à p^* et situé au point de rencontre $C_m = \text{Min } C_M$ (point R'). Ce prix (R) est lisible en ordonnée.

D'où la conclusion représentée par la surface de profit en grisée ($EN'p^*N$).

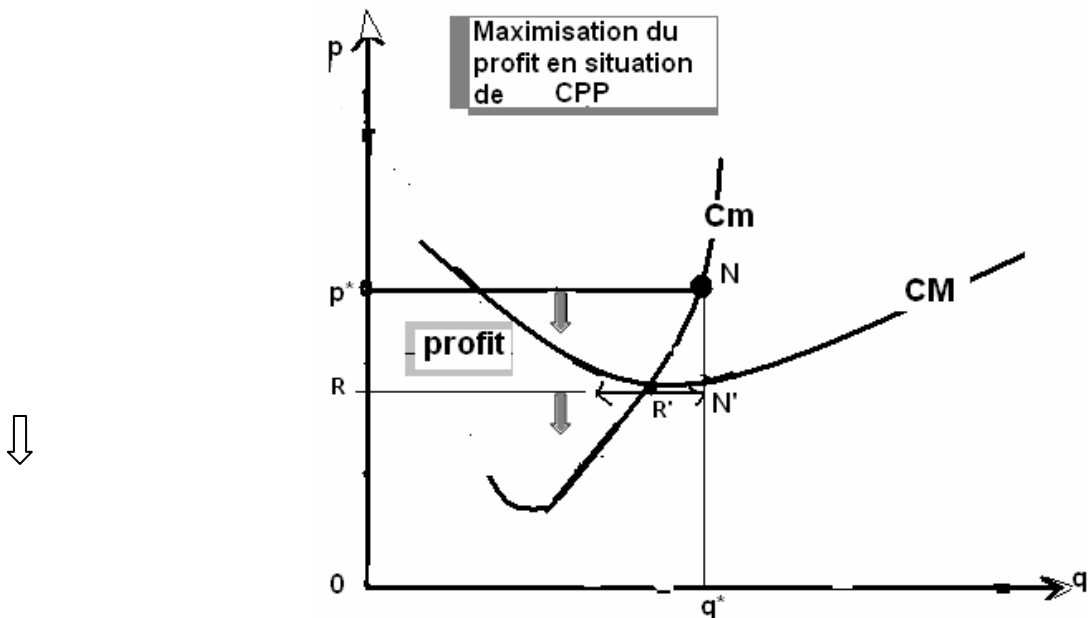
Elle mesure le profit total du monopole, c'est-à-dire le *profit unitaire* $\times$ *quantités vendues*.

Le profit unitaire = $p^* - N'$, et les quantités = q^* et donc le profit total = $(p^* - N') \times q^*$

Par conséquent la portion du profit total situé sous le minimum du coût moyen peut être considéré comme un *surprofit* (parfois appelé *rente*) : ($RR'N'E$).

La situation décrite est une solution durable, puisque p^* dépend du monopole. Et, tandis qu'en CCP, un tel profit aurait attiré dans la branche, de nouvelles entreprises, lesquelles concurrençant les autres auraient contribué à diminuer p^* , ici ce n'est pas le cas, puisque le monopole maîtrise le marché.

Cette maîtrise évite au monopole de se confronter à la demande à la firme, laquelle impose le prix aux entreprises en CPP, et donne à la surface de profit comme on le rappelle par le graphique ci-dessous une allure différente de celle du monopole.



En CPP, la maximisation du profit suppose l'égalité ci-dessus au point N : $p^* = C_m$.

On obtient ainsi une surface de profit (p^*, N, N', R) pour des quantités d'équilibre ou optimales $q = q^*$. La demande à la firme, c'est-à-dire l'horizontale (p^*N) est ici au-dessus du seuil de rentabilité (point R'). Aussi le profit total est-il relativement important. Mais cette situation peut n'être pas durable. Elle dépend de cette demande, qu'exprime graphiquement le mouvement de l'horizontale vers le bas. La surface de profit peut se contracter subitement. Si l'horizontale passe sous le seuil de rentabilité, les entreprises font des pertes.

IV13) Maximisation en situation de duopole : la solution de Cournot

IV131) Modèles de maximisation en situation de duopole

La concurrence imparfaite peut mettre en présence sur le marché deux ou plusieurs vendeurs, face à une demande unique ou segmentée. Parmi les vendeurs plusieurs climats peuvent régner. C'est de ce climat entre vendeurs que dépend le type de maximisation du profit propre au marché de concurrence imparfaite. Plusieurs hypothèses ont ainsi été envisagées pour donner naissance à des *modèles de maximisation*. Le modèle dit de « double dépendance de Cournot » est l'un de ces modèles. Les autres modèles sont également basées sur le rapport de dépendance entre les deux vendeurs. La typologie du duopole habituelle met en présence deux producteurs A et B. Elle est donnée dans le tableau ci-dessous :

Les configurations de duopole

A. Frois : "Microéconomie"
2nde Edition-1989- P 244

		Producteur B	
		Comportement de dépendance	Comportement de maîtrise
Producteur A	Comportement de dépendance	Equilibre de Cournot (double dépendance)	Equilibre de Stackelberg (duopole asymétrique)
	Comportement de maîtrise	Equilibre de Stackelberg (duopole asymétrique)	Pas d'équilibre possible (duopole de Bowley)

Le duopole de Cournot repose sur la double dépendance, dont *les fonctions de réaction* sont la traduction mathématique. L'hypothèse de Cournot a été généralisée à plus de deux vendeurs, par J. Nash en 1954, pour finalement rapprocher le modèle de celui de la CPP. D'où l'expression d'équilibre de « Cournot-Nash » parfois donnée à ce modèle.

IV132) Les fonctions de réactions

On appelle q_A et q_B , les productions respectives des deux vendeurs d'un même bien, au prix p . La production totale est $q_A + q_B = q$. Elle est comme d'habitude une fonction décroissante du prix, soit $p = \varphi(q)$ et $\varphi'(q) < 0$.

Suivant Cournot, chaque duopoleur réalise un chiffre d'affaires (ou Recette "R") qui dépend de son propre niveau de production, mais aussi de celui de son concurrent, le prix p étant donné. On a :

$$R_A = q_A p = q_A \varphi(q_A + q_B) = R_A(q_A, q_B)$$

$$R_B = q_B p = q_B \varphi(q_A + q_B) = R_B(q_A, q_B)$$

Les duopoleurs ont chacun leur coût total : $C_A(q_A)$ et $C_B(q_B)$.

Il est alors possible d'écrire leur fonction de profit respective : $\Pi = RT - CT$, soit

$$\Pi_A = R_A(q_A, q_B) - C_A(q_A)$$

$$\Pi_B = R_B(q_A, q_B) - C_B(q_B)$$

L'hypothèse de maximisation propre à Cournot est : chaque duopoleur maximise son profit en supposant que son concurrent ne modifie pas sa propre décision de production.

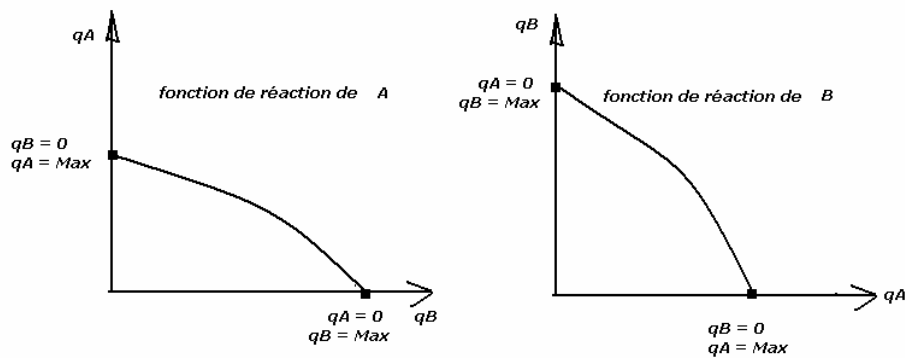
Aussi : pour A, est supposée fixée q_B et pour B, est supposée fixée q_A .

Sous cette hypothèse : A recherche q_A^* , le niveau optimal de sa production, tel que son profit soit maximum, soit $d\Pi_A/dq_A = 0$. Et de même pour B : $d\Pi_B/dq_B = 0$.

On définit alors $q_A = g(q_B)$ avec $g'(q_B) < 0$, la **fonction de réaction de A**, pour traduire les niveaux de production optimaux choisis par A, pour tous les niveaux de production de B.

Si l'on ne peut à priori connaître l'allure de la fonction de réaction, on sait que le niveau de production de A sera d'autant plus élevé que le niveau de production est faible. Il en va de même pour le producteur B, dont la fonction de réaction est : $q_B = h(q_A)$ avec $h'(q_A) < 0$.

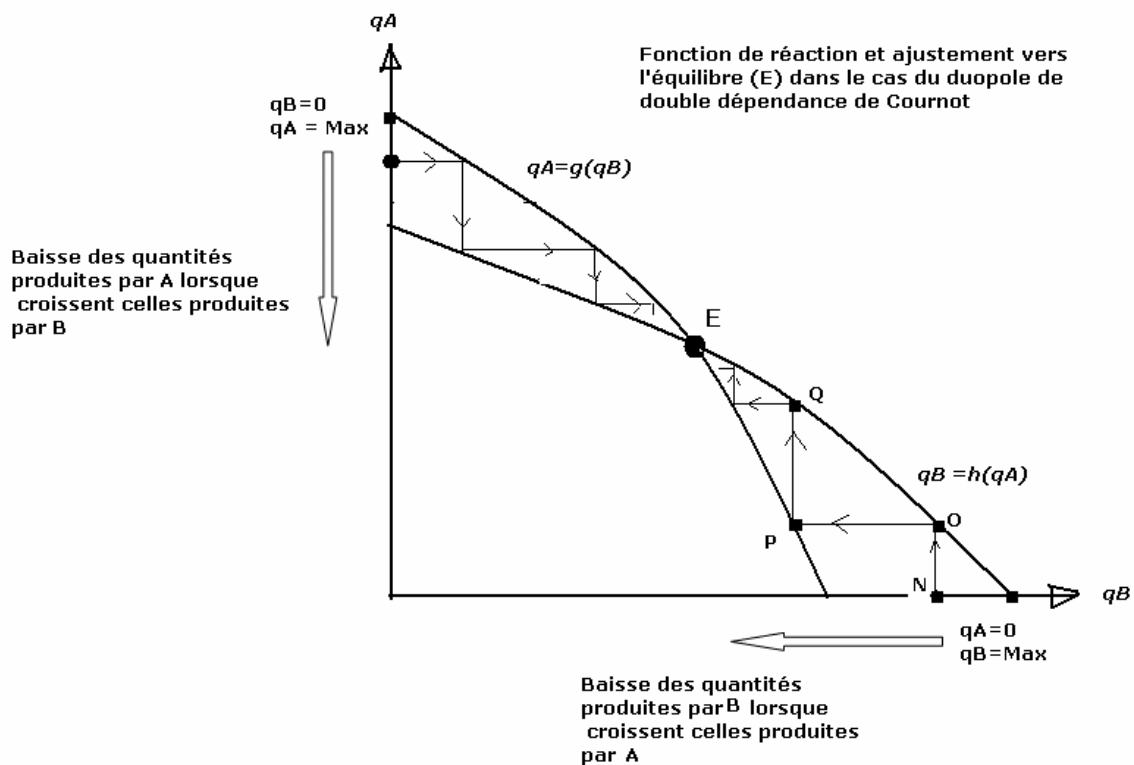
Les deux fonctions ont alors la forme suivante :



IV133) L'équilibre des quantités

Il n'y a équilibre des quantités produites, que si les producteurs A et B ne souhaitent plus modifier leur quantités. Ou il est nécessaire que l'on connaisse l'une des deux quantités, pour mettre en évidence un processus d'ajustement sur le marché qui mène à un équilibre des quantités.

La présentation de cet équilibre consiste à représenter dans le même graphique les deux fonctions de réaction. On lit alors comment s'opère l'ajustement vers le point d'équilibre (E).



En considérant donné le point d'abscisse (N) correspondant à O quantités produites par B en réaction à A, il s'ensuit la réaction de A au point (P), qui suscite celle de B au point (Q) etc...jusqu'à l'équilibre (E). Il est possible de faire la même lecture dans la partie supérieure du croisement des courbes représentatives des fonctions de réaction.

IV13) Maximisation en situation de duopole : **la solution de Cournot**

IV131) *Modèles de maximisation en situation de duopole*

La concurrence imparfaite peut mettre en présence sur le marché deux ou plusieurs vendeurs, face à une demande unique ou segmentée. Parmi les vendeurs plusieurs climats peuvent régner. C'est de ce climat entre vendeurs que dépend le type de maximisation du profit propre au marché de concurrence imparfaite. Plusieurs hypothèses ont ainsi été envisagées pour donner naissance à des *modèles de maximisation*. **Le modèle dit de « double dépendance de Cournot »** est l'un de ces modèles. Les autres modèles sont également basées sur le rapport de dépendance entre les deux vendeurs. La typologie du duopole habituelle met en présence deux producteur A et B. Elle est donnée dans le tableau ci-dessous :

Les configurations de duopole

A. Frois : "Microéconomie"
2nde Edition-1989- P 244

		Producteur B	
		Comportement de dépendance	Comportement de maîtrise
Producteur A	Comportement de dépendance	Equilibre de Cournot (double dépendance)	Equilibre de Stackelberg (duopole asymétrique)
	Comportement de maîtrise	Equilibre de Stackelberg (duopole asymétrique)	Pas d'équilibre possible (duopole de Bowley)

Le duopole de Cournot repose sur la double dépendance, dont les fonctions de réaction sont la traduction mathématique. L'hypothèse de Cournot a été généralisée à plus de deux vendeurs, par **J. Nash** en 1954, pour finalement rapprocher le modèle de celui de la CPP. D'où l'expression d'équilibre de « Cournot-Nash » parfois donnée à ce modèle.

IV132) Les fonctions de réactions

On appelle q_A et q_B , les productions respectives des deux vendeurs d'un même bien, au prix p . La production totale est $q_A + q_B = q$. Elle est comme d'habitude une fonction décroissante du prix, soit $p = \varphi(q)$ et $\varphi'(q) < 0$.

Suivant Cournot, chaque duopoleur réalise un chiffre d'affaires (ou Recette 'R') qui dépend de son propre niveau de production, mais aussi de celui de son concurrent, le prix p étant donné. On a :

$$R_A = q_A p = q_A \varphi(q_A + q_B) = R_A(q_A, q_B)$$

$$R_B = q_B p = q_B \varphi(q_A + q_B) = R_B(q_A, q_B)$$

Les duopoleurs ont chacun leur coût total : $C_A(q_A)$ et $C_B(q_B)$.

Il est alors possible d'écrire leur fonction de profit respective : $\Pi = RT - CT$, soit

$$\Pi_A = R_A(q_A, q_B) - C_A(q_A)$$

$$\Pi_B = R_B(q_A, q_B) - C_B(q_B)$$

L'hypothèse de maximisation propre à Cournot est : chaque duopoleur maximise son profit en supposant que son concurrent ne modifie pas sa propre décision de production.

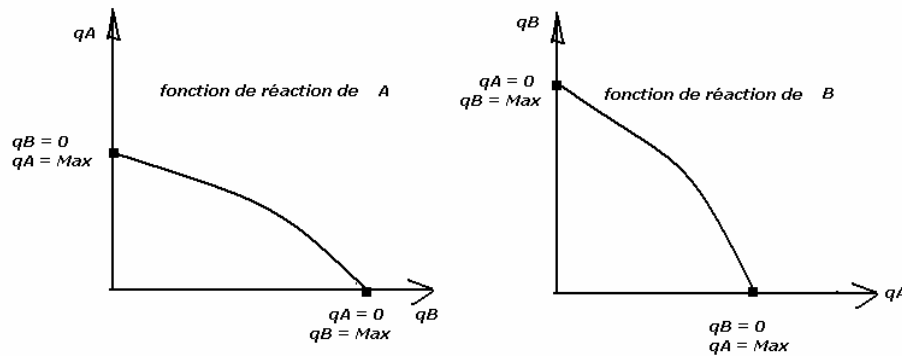
Aussi : pour A, est supposée fixée q_B et pour B, est supposée fixée q_A .

Sous cette hypothèse : A recherche q_A^* , le niveau optimal de sa production, tel que son profit soit maximum, soit $d\Pi_A/dq_A = 0$. Et de même pour B : $d\Pi_B/dq_B = 0$.

On définit alors $q_A = g(q_B)$ avec $g'(q_B) < 0$, la **fonction de réaction de A**, pour traduire les niveaux de production optimaux choisis par A, pour tous les niveaux de production de B.

Si l'on ne peut à priori connaître l'allure de la fonction de réaction, on sait que le niveau de production de A sera d'autant plus élevé que le niveau de production est faible. Il en va de même pour le producteur B, dont la fonction de réaction est : $q_B = h(q_A)$ avec $h'(q_A) < 0$.

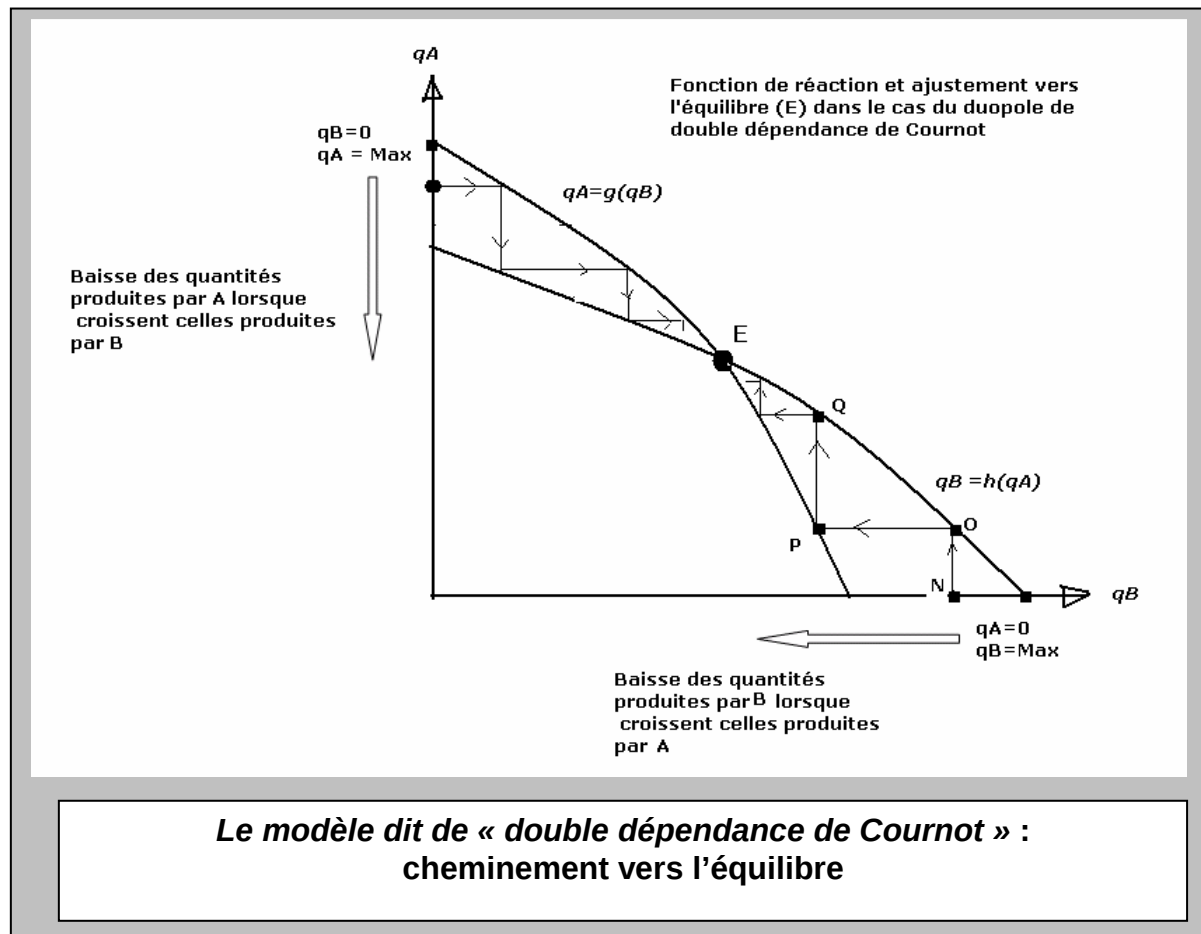
Les deux fonctions ont alors la forme suivante :



IV133) L'équilibre des quantités

Il n'y a équilibre des quantités produites, que si les producteurs A et B ne souhaitent plus modifier leur quantités. Ou il est nécessaire que l'on connaisse l'une des deux quantités, pour mettre en évidence un processus d'ajustement sur le marché qui mène à un équilibre des quantités.

La présentation de cet équilibre consiste à représenter dans le même graphique les deux fonctions de réaction. On lit alors comment s'opère l'ajustement vers le point d'équilibre (E).



En considérant donné le point d'abscisse (N) correspondant à O quantités produites par B en réaction à A, il s'ensuit la réaction de A au point (P), qui suscite celle de B au point (Q) etc...jusqu'à l'équilibre (E). Il est possible de faire la même lecture dans la partie supérieure du croisement des courbes représentatives des fonctions de réaction.

IV2) Economies et déséconomie externes : aperçu sur les effets externes

IV21) Définitions

Comme l'a montré Marshall, les entreprises peuvent réaliser deux types d'économies lorsqu'elles accroissent leur production, ou font varier l'échelle de leur production (hypothèse de la longue période):

- **Les économies internes** : sont celles liées à la taille des firmes, leurs ressources, leur organisation, leur efficacité. C'est le cas lorsque en longue période s'opère entre facteurs de production une « *substitution à la marge* » (du travail considéré comme peu productif, par des machines par exemple) autorisant alors les entreprises à diminuer leur prix d'offre consécutivement à la baisse de leur coût moyen. Le type de rendements que connaît l'entreprise joue alors de manière différente sur l'offre
- Le second type d'économies ce sont les **économies externes**. Elles sont un cas particulier d'une analyse plus générale de Marshall connue sous le nom **d'EXTERNALITES**. Une entreprise peut en effet disposer d'avantages pour lesquels elle n'a subi aucun supplément de coût de production. C'est le cas par exemple lorsque la présence, l'activité, la croissance d'autres firmes lui profitent. Plus généralement le cas aussi : des innovations réalisées par d'autres entreprises, la présence d'une main d'œuvre formée et qualifiée, l'existence d'écoles, d'infrastructures, de clients et fournisseurs, à proximité. Il est vrai cependant qu'à l'opposé, l'entreprise peut subir des *déséconomies externes*. Elles sont appelés *externalités négatives*, contrairement aux précédentes, dites *externalités positives*. Marshall n'a pas mesuré toutes les conséquences théoriques de l'introduction d' « externalités », dans le jeu de la loi de l'offre et de la demande. Un long débat théorique devait en fait naître à partir de Sraffa et se prolonger jusqu'à notre époque et faire intervenir le rôle de l'Etat, dans les travaux de R. Coase par exemple.

IV22) Optimisation de la production -2- et effets externes : Un exemple

Un entreprise produit un bien Q à l'aide de deux inputs X et Y. Sa fonction de production, de type Cobb-Douglas est : $q = 2 \cdot x^{2/3} \times y^{1/3}$. Cette entreprise et sa fonction sont représentative de la branche où existe 100 entreprises (qui ont donc toutes la même fonction q).

Pour distinguer l'entreprise de la branche, on indice par « i » les variables relatives à l'entreprise.

Cette branche peut puiser dans une *offre du facteur de production X*, qui est : $x = (3 \cdot 10^4) / 64 \times s$

Où « s » est le prix de l'input X. On suppose donc donné la quantité de l'autre facteur Y, soit $y = y_0 = 8$, dont le prix unitaire est $k = 2$.

Comme dans la TNC_p en CPP, on demande :

- 1) de déterminer la fonction du coût marginal de l'entreprise i, mais sous la forme $C_{mi} = f(q_i, q)$. On reconnaît q_i , le niveau d'output de l'entreprise i, et q, celui de la branche,
- 2) d'en déduire la fonction d'offre d'output de la branche, sous la forme : $q = \varphi(p)$
- 3) En supposant que i, anticipe la production de la branche en prévoyant $q_0 = 3600$, quel processus d'ajustement s'ensuit-il, sachant que la demande d'output à la branche est infiniment élastique au prix $p = 5,4$?

Cet ajustement étant fait, quel est alors le niveau de production de la branche, et quel profit réalise alors chaque entreprise.

Réponse à la question 1)

On raisonne en considérant que les opérations de la branche déterminent celles de l'entreprise i . Ainsi, la demande d'input x , et le prix d'équilibre de cet input, sont déterminés par le niveau de production de la branche. L'entreprise doit donc calculer son coût marginal, relativement à son propre niveau de production (q_i), mais aussi à celui de la branche (q)

Sont donc le coût total supporté par i : $CT_i = (s.x_i) + (k.y_0) = (s.x_i) + (2 \times 8) = (s.x_i) + 16$.

Comme $s = 64 / (3.10^4) \times x$ (puisque $x = (3.10^4/64) \times s$) alors

$CT_i = 64 / (3.10^4) \cdot x \cdot x_i + 16$. On a alors $CT_i = CT_i(x, x_i)$. Mais il faut l'exprimer relativement aux quantités : $CT_i = CT_i(q, q_i)$. On connaît $q = q_i = 2 \cdot x^{2/3} \times y^{1/3}$, et lorsque $y = y_0 = 8$, on a

$q_i(x, y_0) = 4 \times x^{2/3} = (8x_i)^{2/3} \Leftrightarrow x_i = (q_i^{3/2})/8$ qui donne la demande d'input X par i , en fonction du niveau d'output de i .

Il faut passer cette équation au niveau de la branche. On sait que $x = 100 x_i$ et $q = 100 q_i$, on en déduit pour la branche : $x = 100 x_i = (100 q_i^{3/2})/8 = ([100^{-1/2} \times 100^{3/2}] \times q_i^{3/2})/8$ ou

$= (100^{3/2} \times q_i^{3/2}) / (100^{1/2} \times 8)$ de cette expression « tout en i », on passe à son équivalent en « q », soit : $= q^{3/2}/80$ puisque le numérateur précédent n'est autre que $q^{3/2}$.

On a donc $x_i = q^{3/2}/80$

(NB : de $100x_i = q/8$ on est passé de x_i à q sachant que $x = 100x_i$ et $q = 100q_i$, avec $x_i = (q_i^{3/2})/8$).

L'entreprise produit 100 fois moins et utilise 100 fois moins de facteur X . Sa relation entre 1 unité de X et q_i est $x_i = (q_i^{3/2})/8$.

Le coût total pour l'entreprise i , s'écrit alors :

$$CT_i = 64 / (3.10^4) \cdot x \cdot x_i + 16 \Leftrightarrow [1 / (3.10^5)] \times q^{3/2} \times q_i^{3/2} + 16$$

Le terme $[1 / (3.10^5)] \times q^{3/2}$ s'explique de la manière suivante : il était $64 / (3.10^4) \cdot x$, en remplaçant x par $(q^{3/2}/80)$ et x_i par $(q_i^{3/2}/8)$, il devient : $[64 / (3.10^4)] \times (q^{3/2}/80) \times (q_i^{3/2}/8)$ et donc en simplifiant par 64 en haut et en bas, il reste un facteur $(1/10)$ que l'on réintègre au dénominateur en passant de 10^4 à 10^5 .

Ainsi, l'expression du coût total montre que l'entreprise connaît des « déséconomies externes » : en effet l'accroissement de la production de la branche (q) se traduit par une élévation du coût total supporté par l'entreprise. Dans l'hypothèse opposée, l'entreprise bénéficierait d'économies externes.

Le coût marginal est alors en dérivant CT_i par rapport à q_i

$$(\partial CT_i / \partial q_i) = [1 / (3.10^5)] \times q^{3/2} \times (3/2) q_i^{1/2} + 16 \text{ et en simplifiant par 3,}$$

$$(\partial CT_i / \partial q_i) = [1 / (2.10^5)] \times q^{3/2} \times q_i^{1/2}$$

Ainsi, lorsque $q = q^*$ fixée, lui correspondra un coût marginal pour l'entreprise i . Celle-ci connaît autant de coût marginaux, qu'il y a de niveaux de production de la branche (q^*).

Question 2) déduire la fonction d'offre d'output de la branche, sous la forme : $q = \varphi(p)$

La courbe d'offre recherchée peut être déduite de l'équation du coût marginal, une fois que toutes les entreprises se sont alignées sur la production de la branche. Ce n'est pas à proprement parler un *coût marginal* à long terme, mais plutôt, un *coût marginal après ajustement* (ci-dessous on a $100q_i$ et non (q_i), soit :

$$(\partial CT_i / \partial q_i) = [1 / (2.10^5)] \times (100 q_i)^{3/2} \times q_i^{1/2}, \text{ en simplifiant et réalisant les puissances,}$$

$$(\partial CT_i / \partial q_i) = [1 / (2.10^2)] \times q_i^2$$

L'équation de la courbe d'offre (de l'entreprise, de la branche) est obtenue par égalisation du coût marginal et du prix, soit $C_m = p$
 $q_i^2 / (2 \cdot 10^2) = p \rightarrow q_i = 10 (2p)^{1/2}$ **et donc pour la branche : $q = (10 \times 100)(2p)^{1/2} = 10(2p)^{1/2}$**

Question 3) $q_0=3600$, quel processus d'ajustement s'ensuit-il, sachant que la demande d'output à la branche est infiniment élastique au prix $p=5,4$?

Cet ajustement étant fait, quel est alors le niveau de production de la branche, et quel profit réalise alors chaque entreprise.

$q_0 = 3600$ Comme $C_{mi} = [1 / (2 \cdot 10^5)] \times q_0^{3/2} \times q_i^{1/2} = [1 / (2 \cdot 10^5)] \times (3600)^{3/2} \times q_i^{1/2}$ (cf supra)
 $C_{mi(3600)} = 1,08 \times q_i^{1/2}$

L'offre de i est $p = C_{mi(q_0)} \Leftrightarrow p = 1,08 \times q_i^{1/2}$ d'où l'on déduit : **$q_i = (p/1,08)^2$**

Et enfin, si le prix de marché est $p=p^*=5,4$, l'entreprise i doit décider de produire (en remplaçant)

$q_i = (p/1,08)^2$, soit **$q_i = (5,4/1,08)^2 = 25$**

(On peut ensuite déterminer le profit alors réalisé).

