Chapitre I
La théorie néo-classique du comportement du consommateur ou théorie du consommateur (TNC_c)

Introduction

Le but de la TNC_c est de *déterminer la loi qui régit la demande de biens, dotés d'un prix de marché*. L'hypothèse principale issue de l'observation empirique est : *si la fonction de demande de X* en fonction de son prix (p_x) a pour écriture qd_x ou q_x = *f(px)* alors (dq/dpx, la dérivée) est négative. La courbe représentative montre ainsi que la demande d'un bien est fonction inverse de son prix.
La demande observée d'un bien sur le marché est censée refléter pour la théorie marginaliste des **lois essentielles du comportement humain et individuel**. La diversité des goûts et préférences de chaque consommateur, de même que la diversité des biens utilisés pour la consommation finale, ainsi que les ***contraintes*** qui expriment la ***rareté*** (celle des biens et celle du revenu) conduisent à définir ces lois essentielles comme ***un problème mathématisable de choix rationnel sous contrainte***. Le problème est celui de la maximisation de l'utilité (ou satisfaction) **–notée U**- sous la contrainte du revenu **–noté R-** plus précisément il s'agit de maximiser sous contrainte la satisfaction retirée de la dépense du revenu (dépense intégrale dans l'hypothèse d'une épargne nulle). Cette satisfaction est exprimée par une *fonction objectif* à 2 biens, dont l'énoncé général est : **U=*f*(x,y)** où x et y désignent les quantités consommées de chaque bien, inconnues, sous la contrainte de leur prix p_x et p_y *donnés* (ou *exogènes)*, et du revenu (R) du consommateur. **Maximiser sous contrainte ou *optimiser* l'utilité (et donc la dépense) consiste à rechercher l'*équilibre* ou *optimum du consommateur***.

Cet optimum étant déterminé et donc connu, il est alors possible d'en déduire la demande du consommateur sur le marché pour les biens X et Y, en quantités *x et y*.
Pour le bien X par exemple cette demande *individuelle* pour le consommateur *« i »* s'écrit qd^ix. On simplifiera cette écriture en omettant l'indice « i », voire le « x », lorsque cela sera évident, pour ne retenir que qd_x ou q_x. Il s'agit d'une *fonction,* dont on étudie la courbe représentative appelée ***courbe de demande du bien* x *en fonction de son prix***. Au préalable, auront été examinées les réactions du consommateur « i » aux changements éventuels de prix, ou de revenu, conformément à ses préférences et goûts, donnés par sa fonction d'utilité (U).
La demande qd^ix diffère de celle qu'expriment tous les consommateurs d'un même bien sur le marché. On note cette dernière Qd_x ou Q_d, et on la nomme ***demande globale* ou *agrégée.*** L'agrégation de la fonction de demande mais aussi celle de l'offre requièrent une méthode particulière.

On remarque ainsi que lorsqu'elle s'élève à un niveau « global », celui du marché d'un bien, et à fortiori celui de l'ensemble des marchés (équilibre général), la TNC le fait toujours à partir d'hypothèses relatives à des comportements élémentaires (ici celui du consommateur). Ces comportements sont dits *« microéconomiques »*, et valent pour la consommation de biens, pour le travail, pour les capitaux, c'est-à-dire sur tous les marchés étudiés par la TNC. Au passage, on peut mentionner qu'il y a donc au moins deux manières de traiter la *macro économie* : en lui supposant des fondements *microéconomiques,* ou en la distinguant de tout ou partie de ces fondements. La première voie est celle des auteurs néo-classique, et la seconde celle des keynésiens (dont certains ont choisi de réintégrer la totalité des fondements *micro* donnant naissance à *la nouvelle économie classique*).

I) Le comportement des consommateurs : *la fonction d'utilité*

I1) Utilité cardinale et utilité ordinale

La base de la TNCc est l'hypothèse du ***classement** des biens par chaque consommateur*. Mais cette hypothèse est formalisée de deux manières correspondant au mode d'évaluation de l'utilité ou satisfaction retirée de la consommation.

I11) l'hypothèse 1 : ***l'utilité cardinale*** **(ou TNC_c première forme)**

Cette hypothèse consiste à définir *la fonction d'utilité* –U-, propre à chaque consommateur, en supposant que l'utilité est un concept *mesurable*. Cette hypothèse est celle de *l'utilité cardinale*, dont la *table de Menger* est la présentation la plus connue.
Il est donc possible de dresser une relation d'*ordre*, dite *ordre complet, du type* : $A \geq B$ ou $B \geq A$. Cette hypothèse a été levée par Edgeworth et Pareto au profit de la seconde.

I12) l'hypothèse 2 : ***l'utilité ordinale*** **(ou TNC_c seconde forme)**

La première hypothèse établit une relation du type **« *supérieur ou égal à* ».** Avec la seconde est établie une relation d'ordre complet du type ***« préféré ou équivalent à »*,** dont les symboles mathématiques sont respectivement : $\succ$ (préféré a) ou $\succsim$ (équivalent à).

I2) La fonction d'utilité à un bien : Utilité totale (U_T) et utilité *marginale* (U_m)

I21) La TNC_C première forme raisonne au moyen de la fonction d'utilité à un bien. Soit la fonction d'utilité du bien X, où on associe à x l'élément U(x)

$$x \xrightarrow{U} U_x$$

La fonction U = U(x) présente plusieurs propriétés :

- la continuité : U est définie pour tout $0 \leq x < \infty$. Ce qui implique que les quantités consommées du bien (x) sont infiniment divisibles.
- La dérivabilité du premier et du second ordre (ou dérivée seconde). La fonction –U- est supposée posséder les caractéristiques d'une fonction de classe C^1, qui admet une dérivée du premier ordre, dont l'expression est :

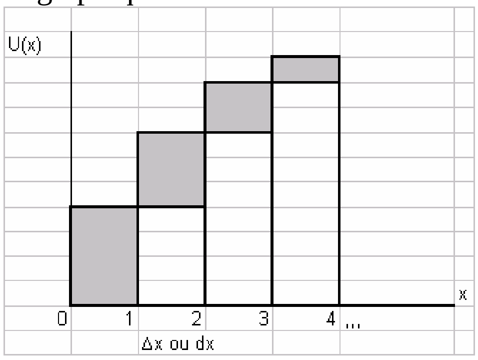
$$U'_x = dU/dx = \lim_{\Delta x \to 0} dU/dx$$

La dérivée seconde étant :

$$U''_x = \frac{d^2U}{dx^2}$$

La dérivée première possède une signification économique. Elle exprime la variation de l'utilité totale (notée U_T) due à une variation infinitésimale de la quantité consommée du bien x. **Cette variation à la marge fait que la dérivée est appelée *utilité marginale du bien x* ($U_m x$).**
On a donc $U'x = U_m x$. L'$U_m x$ désigne la satisfaction procurée par une unité additionnelle du bien x.
La dérivée $U'_x > 0$ en vertu du principe de *non saturation*. Le consommateur éprouve en effet des besoins illimités.

I22) Cette définition donne lieu au graphique suivant :

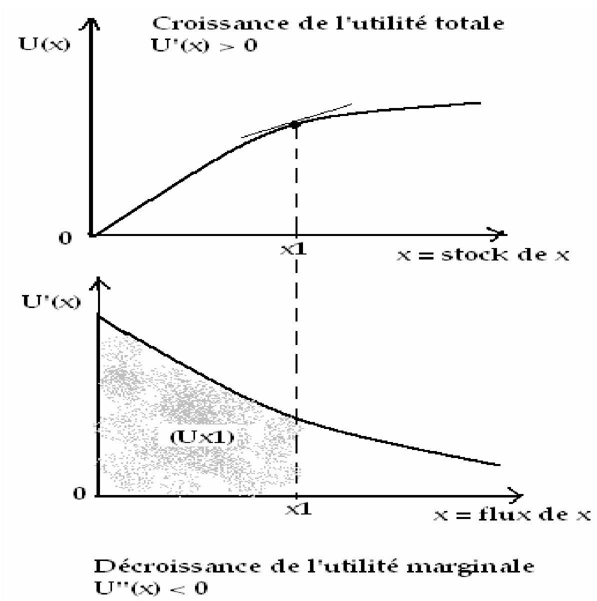


L'U_mx (en grisé) est l'utilité ou la satisfaction procuré par l'unité supplémentaire. On constate que l'U_T croît avec la quantité de biens (x), mais la satisfaction procurée par l'unité supplémentaire est décroissante (**les rectangles en grisé ont une hauteur décroissante**).
La décroissance de l'utilité marginale **est mathématiquement vérifiée par la fonction d'utilité par le signe de sa dérivée seconde qui est négatif, soit $U''_x < 0$**.

I23) Etude de la relation entre U_T et U_mx.

Les deux propriétés $U'_x > 0$ et $U''_x < 0$ permettent d'établir une relation entre U_T et U_mx.

- D'une part, **le principe de non saturation** signifie que l'U*m*x est, comme on l'a dit, la limite du rapport dU/dx quand dx→0. Cette limite est déterminée par la variation du stock de x et ses incidences sur U_T.
- D'autre part, en prenant pour hypothèse que la valeur x1 est celle qui *intègre* le stock partant de 0, on peut en déduire la quantité d'utilité totale retirée de la consommation du bien pour x allant de 0 à x1. Une présentation graphique permet d'introduire l'écriture de cette intégrale.
-



La surface (grisée) U_{x1} a pour valeur (lorsque x_1 intègre)

$$\int_0^{x1} U'(x)\,dx$$

<u>Par exemple</u> : La fonction d'utilité à un bien, le bien x, donnée par U(x) = *f*(x) = 105x -5x².
Son domaine de définition est U(x) ≥ 0 pour 0≤ x<21. Cette fonction vérifie les propriétés définies :
$U'_x = -10x + 105$ $U'_x > 0$ si x<10,5
Et $U''_x = -10$ $U''_x < 0$
Ce qui rend possible pour 0≤ x<21, les calculs du stock d'utilité, et l'utilité marginale de chaque unité du stock.

I3) La fonction d'utilité à plusieurs biens

I31) Définition

La fonction s'écrit pour 2 biens X et Y, consommés en quantités respectives x et y : U(x,y).
Elle est engendrée à partir de la fonction à un seul bien, dans la mesure où : U(x,y) = U(x) + U(y). Cette fonction d'utilité donne la *carte d'utilité du consommateur*.
Les biens X et Y sont donc <u>indépendants.</u> Ce qui signifie que le résultat est nul lorsque l'utilité varie d'abord d'une petit quantité x , puis ensuite d'une petite quantité y. Cette condition n'est cependant pas nécessaire. Elle est propre au raisonnement en terme de fonction d'utilité, et elle n'est plus nécessaire dès que l'on passe au raisonnement en termes de ***courbe d'indifférence***.

I32) La représentation graphique de la fonction d'utilité à 2 biens.

Sous l'hypothèse de biens X et Y *indépendants*, on note :
U(x), l'utilité associée à la quantité x du bien X
U(y), l'utilité ‘’ ‘’ y du bien Y
La fonction d'utilité s'écrit alors : U = U(x,y). Elle peut être représentée dans un espace à trois dimensions qui réunit les deux plans (U0x) et (U0y).

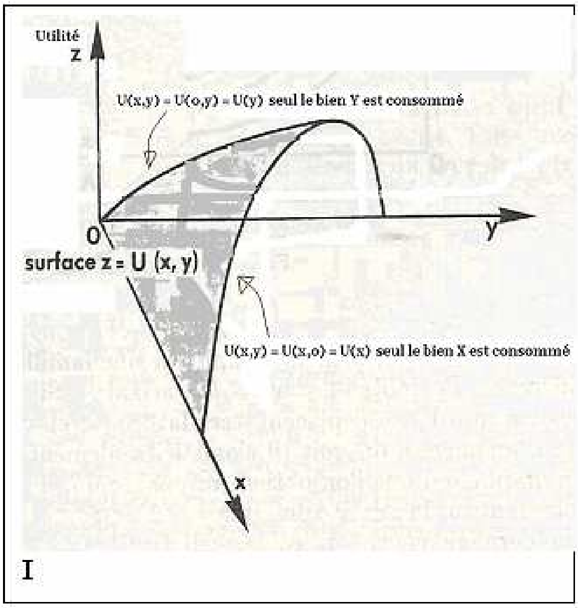
Dans cet espace figurent deux courbes d'utilité :

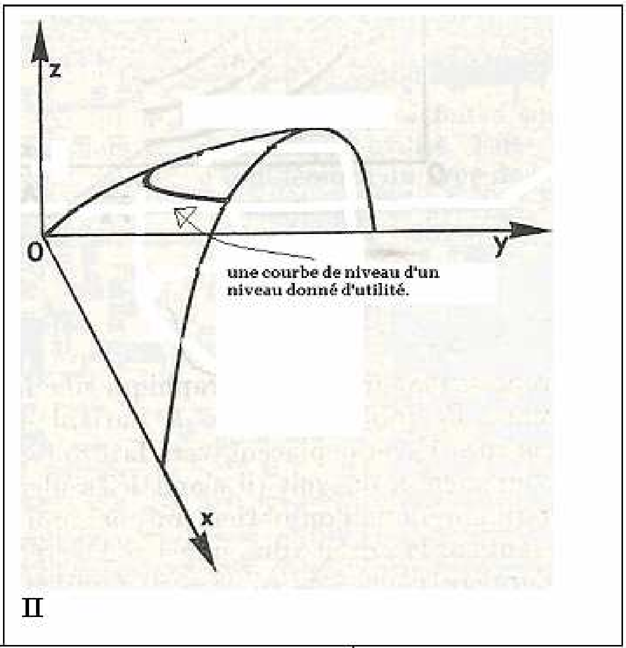
- U(x,y) = U(0,y) = U(y) dans le plan (U0y) lorsque le consommateur ne consomme que du bien Y,
- U(x,y) = U(0,x) = U(x) dans le plan (U0x) lorsque le consommateur ne consomme que du bien X.

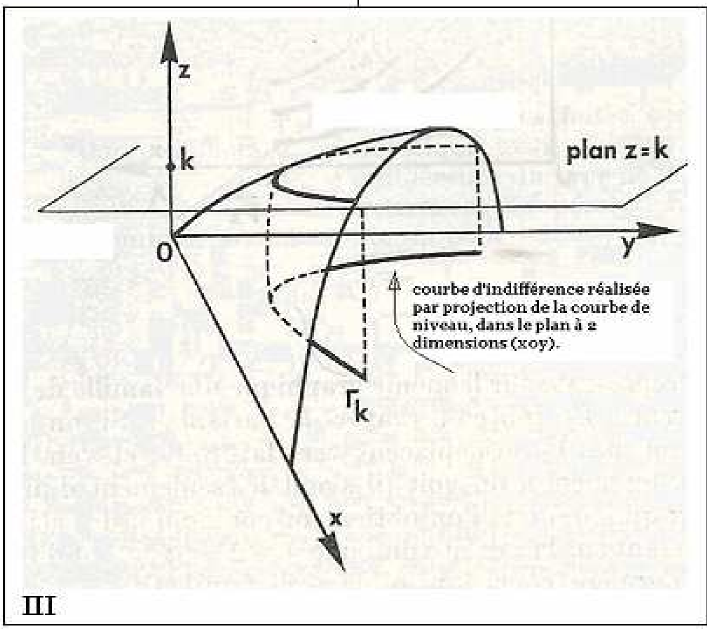
Les étapes (I à V) de la représentation de la fonction d'utilité à deux biens dans la plan à deux dimensions (x0y), décrites dans l'encadré ci-dessous, peuvent être commentées comme suit :
I) Dans l'espace à trois dimensions (z,0,y,x), l'ensemble des combinaisons de biens (x,y) donne lieu à la représentation *d'une surface d'utilité* z = U(x,y). Celle-ci est obtenue par la combinaison deux à deux de tous les vecteurs possibles compris entre U(y) et U(x), respectivement l'utilité de Y lorsque la consommation du bien X est nulle, et l'utilité de X lorsque la consommation du bien Y est nulle.
II) La *surface d'utilité* z = U(x,y) comporte un *système de courbes de niveau* (dont le modèle est représenté), dont l'équation est *appelée* carte ou fonction d'utilité,
En représentant l'ensemble des courbes de niveau, on constate qu'elle représente chacune un niveau d'utilité, et que celui croît du bas vers le haut.
On sait par démonstration que *le système des courbes de niveau* est *concave*, tandis que chaque courbe de niveau est *convexe*.
III) Pour simplifier l'analyse, on ne raisonne pas sur les courbes de niveau, mais sur *leur projection dans un plan à deux dimensions*, donc sur l'équation de la *courbe d'indifférence.*
Il suffit de se donner, dans le plan à 3 dimensions, un niveau d'utilité U(x,y) = k pour obtenir par projection, dans le plan à deux dimensions (x0y), une représentation plane de la courbe de niveau. Cette nouvelle courbe, noté Γ_K est *l'intersection de la surface* z = U(x,y) avec le plan z = k. La projection de la *courbe de niveau* est appelé *courbe d'indifférence*.
IV) Le résultat de la projection de l'ensemble de la surface z = U(x,y) dans la plan (x0y) est donc celle d'une *famille de courbes* Γ_K. Celles-ci représentent le *système des courbes d'indifférence*. Chaque courbe correspond à un niveau donné d'utilité, et l'utilité croît à mesure que l'on s'éloigne de l'origine.
V) La représentation plus commune étant plutôt celle d'un repère orthonormé classique.

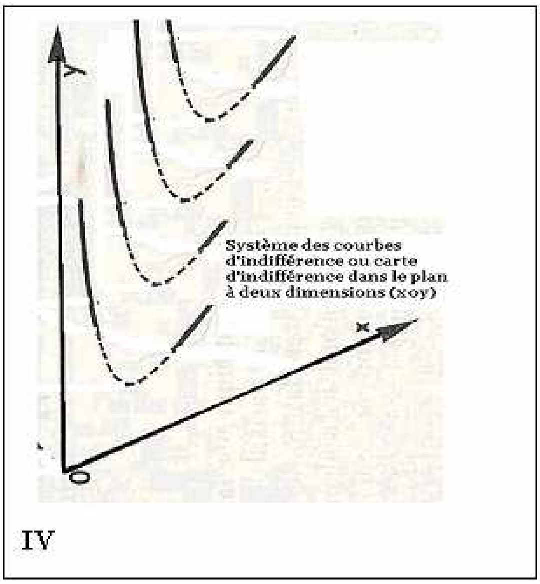
La leçon essentielle a donc trait à *la relation existant* ***entre*** **la concavité** ***de la colline,*** **et la** ***convexité*** **des courbes d'indifférence**, lorsque la translation est effectuée d'un plan à l'autre. Nous traitons de ce sujet à plusieurs reprises dans le cours. Les exercices de travaux dirigés N°1 et N°3 appliquent la démonstration de la relation.

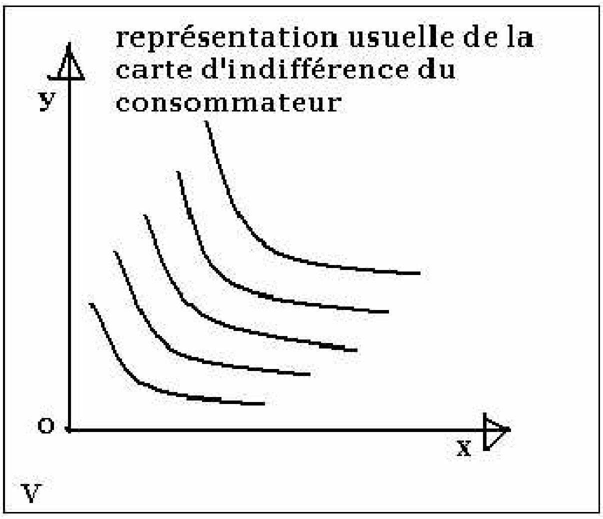
Etapes (I à V) de la construction du système des courbes d'indifférence dans le plan à deux dimensions (xoy)











II) La maximisation de l'utilité sous contrainte ou optimisation des choix du consommateur

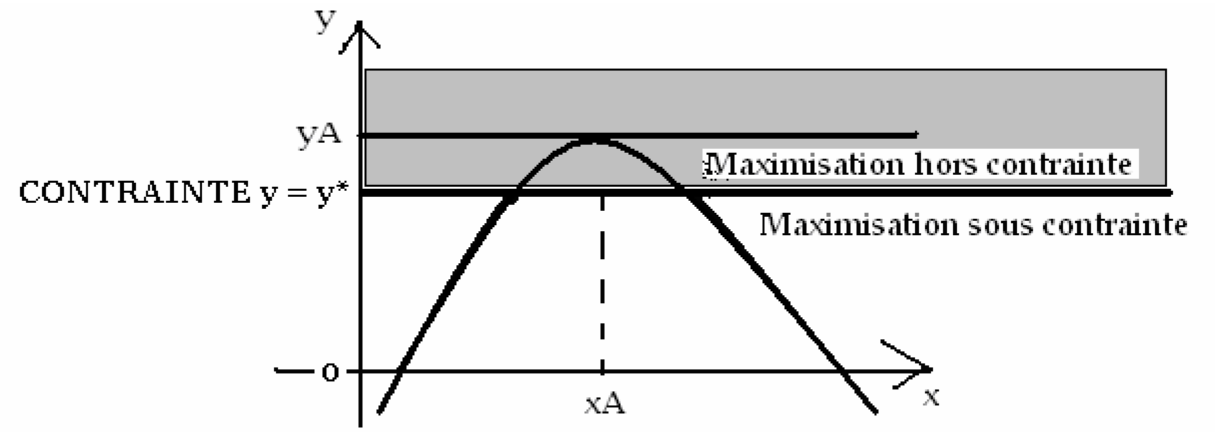
Optimiser une fonction à plusieurs variables, c'est chercher un *optimum* ou le meilleur choix possible. Il revient au même de dire que l'on maximise la fonction sous contrainte, dans le but de déterminer un optimum (*sous-entendu* du choix*)*.
Cette opération peut être réalisée de **deux manières** et suivant plusieurs méthodes. La première manière consiste à partir de **la fonction d'utilité U(x,y).** La seconde a pour base ***la courbe d'indifférence***.

II1) La maximisation de l'utilité sous contrainte à partir de la fonction d'utilité

Dans la TNC_c première forme, le consommateur maximise une quantité d'utilité définie (mesurable ou cardinale), donnée par *la fonction d'utilité U(x,y)*. Les conditions du marché étant celle de la CPP, le marché est « atomistique » et donc les prix s'imposent au consommateur ou sont fixés. On retient p_x et p_y pour définir les prix respectifs des biens X et Y. En outre la maximisation prend pour contrainte le revenu du consommateur.

II11) Maximisation sous contrainte : cas d'une fonction d'utilité à une seule variable.

Pour une fonction quelconque y=*f(x)*, la contrainte prend la forme d'une droite horizontale d'ordonnée $y=y^*$ fixé. En prenant l'exemple du graphique ci-dessous, on se propose d'expliciter, par opposition, la méthode de *la maximisation sous contrainte.*



On lit que le maximum de la fonction est atteint au point A(xA, yA). Mais il n'est pas un *maximum sous contrainte dans la mesure où yA est une valeur exclue des valeurs possibles de la fonction sous contrainte*. Les valeurs qui respectent la contrainte sont donc celles située dans la zone non grisée du graphique. La question est : *de quelle contrainte s'agit-il ?*

II12) La contrainte de budget

Le budget du consommateur est la somme monétaire maximale dont il dispose pour réaliser ses dépenses. La dépense totale, qui ne peut l'excéder, doit être rationnelle, c'est-à-dire correspondre au principe de la maximisation de l'utilité sous contrainte. Il est vrai qu'un autre type de contrainte peut s'imposer à lui, telle que la rareté des biens qu'il souhaite acquérir. On ne considérera ici que la contrainte de budget.

L'hypothèse principale est *l'absence d'épargne*. On dit que le consommateur **épuise son revenu** ou budget dans l'achat des quantités x et y, sachant qu'elles doivent être pondérées par leur prix respectif. Aussi **l'équation de la contrainte de budget** est-elle :

$$\boxed{R = x.p_x + y.p_y}$$

Par exemple s'il dispose de 100€ pour l'achat de deux biens dont les prix sont respectivement px=2 et py =5, sa contrainte s'écrit : R = (2×25) + (5×10) = 100. S'il choisi de ne consommer que du bien x, sa dépense totale sera de D= 4×25 = 100, ou que du bien y : D = 5×20= 100.

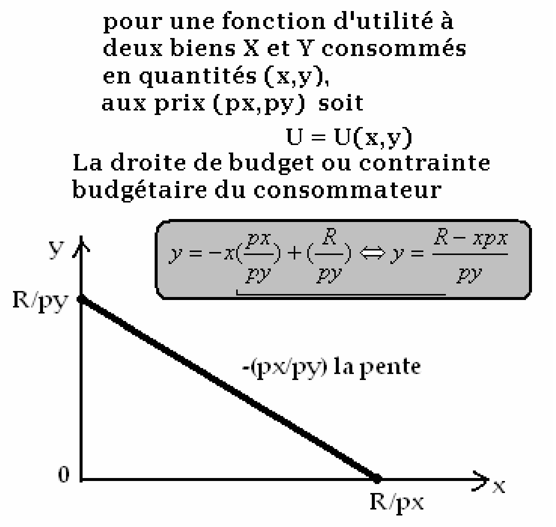
La contrainte de budget étant connue sous cette première forme elle subit pour l'analyse une transformation mathématique importante pour les calculs et éclairante pour la compréhension.
En isolant y, dans l'expression R = $x.p_x + y.p_y$, on obtient une **autre expression de la contrainte** :

$$\boxed{y = -x(\frac{px}{py}) + (\frac{R}{py}) \Leftrightarrow y = \frac{R - xpx}{py}}$$

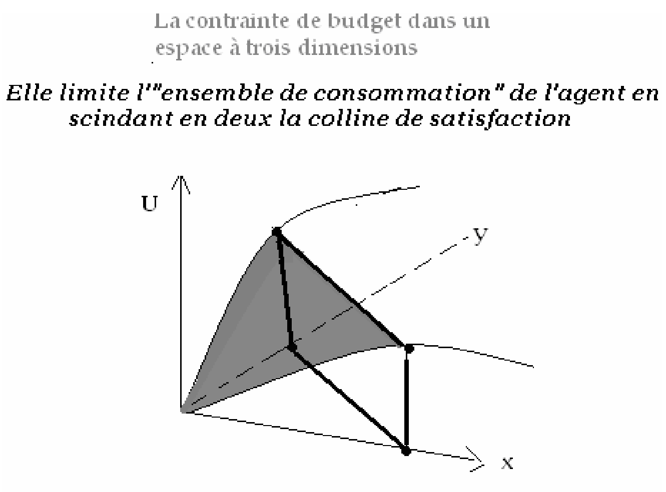
La forme $y = -x(p_x/p_y) + R/py$ est importante :

- elle permet de constater que la courbe représentative est une droite. Aussi l'appellera t'on ***droite de budget (ou de contrainte).***
- **la pente** de cette droite est *négative et égale au* rapport des prix des deux biens
- **l'ordonnée à l'origine** est (R/p_y), c'est-à-dire la quantité maximale de biens y que le consommateur peut acheter au prix donné p_y. On déduit logiquement que **l'abscisse à l'origine** a pour valeur (R/p_x), la quantité maximale de biens x que le consommateur peut acheter au prix donné p_x.

Le graphique représentatif de la droite de contrainte est donc :



La représentation de la contrainte **dans l'espace à trois dimensions** précédent (colline de satisfaction) est celle d'un ***plan sécant*** qui divise la colline en deux domaines (possible et impossible), car il scinde le système des courbes d'indifférence en deux parties. Soit l'illustration sommaire :



Ce qui nous mène au point suivant c).

II13) Maximisation sous contrainte : cas d'une fonction d'utilité à deux variables.

Il existe deux méthodes de maximisation. Mais on pourra voir que, sous certaines conditions, il est possible de déterminer l'optimum partant d'une simple égalité toujours vérifiée à l'équilibre (donc une « troisième » méthode). **Les deux méthodes sont : *la méthode du remplacement* et la *méthode du multiplicateur de Lagrange ou Lagrangien.***

II131) la méthode du remplacement

Cette méthode qui utilise la fonction U(x,y), vise à construire une fonction implicite qui intègre la contrainte de budget. Bien que son application ne présente pas de difficultés, son fondement mathématique (celui des fonctions implicites) ne permet pas l'utilisation de fonctions d'utilité inadaptées.

Soit le programme du consommateur

Max U(x,y)

Sc $R = xp_x + yp_y$

On modifie la forme de la contrainte R pour obtenir $y = -x\,(p_x/p_y) + R/py \Leftrightarrow y = (R - xp_x)/p_y$

On remplace y dans U(x,y) pour obtenir la fonction à maximiser :

$U(x,y) = U(x, (R - x(p_x/p_y)$

On voit apparaître la différence avec le cas de la fonction d'utilité à une seule variable. Ici les biens ne sont plus indépendants. La demande du bien x dépend de celle de y, et des autres variables (le revenu, et les prix des biens). Le consommateur doit donc classer ses choix de combinaisons (x,y).

Les deux conditions d'un optimum, dites du premier et du second ordre, sont alors :

- celle d'un *extremum* (minimum ou maximum). Celui-ci est atteint au point où la dérivée première ($U'_x = 0$). Cette condition permet de déterminer les quantités maximales x et y, et donc le niveau maximum d'utilité alors atteint.
- celle d'un *maximum*, ou *optimum* : la dérivée seconde (U''_x) doit être négative.

L'optimum s'écrit alors à l'aide de ses coordonnées graphiques E(x*, y*, U*) ou **Ω(x*,y*,U*).**

II132) La méthode du Lagrangien ou du multiplicateur de Lagrange

Soit le programme du consommateur

Max U(x,y)

Sc $R - xp_x - yp_y = 0$ (la contrainte est ici saturée)

On forme alors la nouvelle fonction, dite de Lagrange qui comporte **le Lagrangien lambda (λ),** soit :

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = U(x,y) + \lambda(R - xp_x - yp_y)$

Cette fonction doit être *optimisée*, c'est-à-dire, vérifier **la condition du premier ordre :** *ses dérivées partielles premières doivent s'annuler simultanément* ; **et la condition du second ordre** : *le déterminant hessien bordé de la matrice des mineurs principaux doit être positif.*

<u>La condition du premier ordre</u> (ou *« nécessaire »*) porte sur le système des dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \partial U/\partial x = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ \partial U/\partial y = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ \partial U/\partial \lambda = \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{cases}$$ ce qui donne la matrice appelée **F'(.)**

Ce système de 3 équations linéaires (défini dans R) forme une *matrice jacobienne*, notée **F'(.)**. Cette matrice est formée de gradients. Chaque gradient est le *vecteur* (ou la matrice) ligne des <u>dérivées partielles premières.</u> En annulant simultanément les gradients on applique la condition du premier ordre. Ce système **possède des solution en x,y et λ**, desquelles on conclut en l'existence d'un **extremum**. **Ω(x,y,U).** Le Lagrangien λ, sert à peser la poids de la contrainte. Sous des hypothèses Marshalliennes, on l'interprète comme l'*utilité marginale d'une unité monétaire additionnelle ou utilité marginale de la monnaie.*

<u>La condition du second ordre</u> (ou *« suffisante »*) est parfois longue à vérifier. On la suppose souvent vérifiée *à* priori, compte tenu de la nature des fonctions utilisées microéconomie. Toutefois, nous réaliserons la vérification dans plusieurs exercices. Son principe est la construction d'une nouvelle matrice, celles des <u>dérivées partielles secondes</u>, appelée *matrice Hessienne (notée* **H**). On vérifie la condition du second ordre, celle de l'existence d'un *maximum* par la mise en évidence du **signe du**

déterminant dit Hessien bordé, celui de H, noté $|D^2|$. Ce déterminant doit être positif s'il s'agit d'un maximum (**$|D^2| > 0$),** ou <0 pour un minimum.

Des explications et développements de cette méthode sont donnés dans le document de cours « rappels de mathématiques ».

<u>On peut montrer qu'elle a pour fondement le *« théorème des fonctions implicites ».*</u>

La recherche des candidats à un *extremum d'une fonction f(.) (à plusieurs variables), de classe C^1 (2 fois dérivable), est réalisée en annulant les dérivées partielles.*

Soit $f(.) = f(x_{1, \ldots\ldots} x_n)$ cette fonction

Si on suppose les variables $(x_{1, \ldots\ldots} x_n)$ soumises à p contraintes $g_i\,(x_{1, \ldots\ldots} x_n) = 0$ (pour i allant de 1 à p),

La maximisation sous contrainte est réalisée en annulant les dérivées partielles de la fonction dite de Lagrange ou Lagrangien, soit :

$$L(.) = f(.) + \lambda_1 g_1(.) \ldots + \lambda_p g_{p(.)} \text{ avec } \lambda_i \text{ multiplicateur associé à la } i^{eme} \text{ contrainte,}$$

On retrouve le *théorème des fonctions implicites* puisque :

Soit le programme de maximisation de $f(.) = f(x_{1, \ldots\ldots} x_{n}).$

sc $g\,(x_{1, \ldots\ldots} x_n) = 0$ ➔ Cette contrainte définit de manière <u>implicite</u> l'une des variables, soit : $x_n = \varphi\,(x_{1, \ldots\ldots} x_{n-1}) = 0$

La maximisation <u>*sans contrainte*</u> est celle de la fonction objectif :

$$F(.) = f(x_{1, \ldots\ldots} x_{n-1}), \varphi\,(x_{1, \ldots\ldots} x_{n-1})$$

La solution est donnée par le vecteur $A = (a_1 \ldots a_n)$ qui est un *extremum s'il annule les dérivées partielles par rapport à* $(x_{1, \ldots\ldots} x_{n-1}),$ c'est-à-dire les dérivées par rapport à x_i pour i allant de 1 à *(n-1*.

Elles sont obtenues par la règle de dérivation en chaîne, *soit* :

$F(.)'_{xi} = f'_{xi}\,[(x_{1, \ldots\ldots} x_{n-1}), \varphi\,(x_{1, \ldots\ldots} x_{n-1})] + f'_{xn}\,[(x_{1, \ldots\ldots} x_{n-1}), \varphi\,(x_{1, \ldots\ldots} x_{n-1})] \times \varphi'_{xi}\,(x_{1, \ldots\ldots} x_{n-1}) = 0$

A l'extremum $F(.)'_{xi} = 0$ (pour i allant de 1 à *n-1*)

Or, par construction de φ (.) (voir plus haut x_n) : $a_n = \varphi\,(a_{1, \ldots\ldots} a_{n-1})$, il ressort que :

$$\varphi'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_{n-1}) = \frac{\overset{1}{f'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)}}{f'_{xn}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)} \quad \text{si et ssi } f_{xn}\,(.) \text{ différent de 0}$$

Comme $\varphi\,(.) = g\,(x_{1, \ldots\ldots} x_n) = 0$, alors le théorème des fonctions implicites permet d'écrire

$$\varphi'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_{n-1}) = \frac{g'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)}{\underset{2}{g'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)}}$$

et donc

$$\boxed{\frac{\overset{1}{f'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)}}{f'_{xn}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)} = \frac{g'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)}{\underset{2}{g'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)}}}$$

Relation qui donne les conditions du 1^{er} ordre pour l'extremum d'une fonction dont les variables sont liées par une contrainte.

Elle est celle qui s'applique pour la maximisation de l'utilité sous contrainte pour la fonction à deux biens (x,y), lorsqu'on écrit qu'à l'optimum :

$$TMS_{y/x} = p_x/p_y$$

rapport des dérivées partielles ou des utilités marginales = rapport des prix (dérivées de la contrainte de budget $g(q_1 \ldots q_n) = R - \Sigma p_i q_i$. L'égalité traduit en outre le point de tangence entre la courbe de niveau et la droite de contrainte.

On retrouve le Lagrangien de la manière suivante : en transformant l'égalité 1=2, soit :

$$\frac{f'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)}{g'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)} = \frac{f'_{xn}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)}{g'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)}$$

$$\frac{f'_{xn}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)}{g'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)} = -\,\lambda$$

$$\Longrightarrow \quad f'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n) = -\,\lambda\; g'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n)$$

$$\text{et} \quad f'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n) + \lambda\; g'_{xi}\,(a_{1, \ldots\ldots} a_n) = 0$$

soit les dérivées partielles du

$$L(.) = f(.) + \lambda_1 g_1(.) \ldots + \lambda_p g_{p(.)}$$

Remarque :
Cette démonstration reste la même lorsqu'il s'agit de déterminer *l'extremum* d'une fonction dont les variables sont soumises à une *contrainte sous forme d'inégalités.* Elle prend la forme du théorème de Kühn-Tucker (Voir « rappels de mathématiques » et application dans l'exercice N°6 du dossier consommateur).
Les inégalités sont prises en considération en introduisant *des variables d'écart*, telle que $z_i^2 = g_i(X)$,
Et l'inégalité $g_i(X) \geq 0$ devient une *égalité* en écrivant : $g_i(X) - z_i^2 = 0$ (*i allant de 1 à p)*
Et donc $L = f(X) + \Sigma \lambda_i (g_i(X) - z_i^2)$.

II2) La fonction d'utilité à deux biens dans la conception ordinale (TNC_C deuxième forme)

Dans la conception ordinale, la fonction d'utilité sert à classer les préférences et non à mesurer l'utilité. **Mathématiquement il revient au même de dire que les *fonctions d'utilité sont définies à une transformation monotone croissante près*.** La monotonie signifiant que la fonction décroît toujours. Ce qui signifie par exemple que les fonctions *transformées croissantes* U et V de deux consommateurs, données par U, V = *a*U + b, aboutissent au même résultat dans la maximisation sous contrainte.
Ceci constitue une importante étape dans le raisonnement marginaliste puisque les fonctions opérationnelles ne sont plus les fonctions d'utilité (U=*U(*x,y)), mais ***les courbes d'indifférence***. C'est F.Y Edgeworth que l'on doit ce déplacement, qu'après lui V. Pareto intégrera pleinement au *marginalisme*.

II21) Les courbes d'indifférence

II211) La projection du plan (*U,x,y)* au plan (*x0y*) : (voir I32 ci-dessus)

Géométriquement, les courbes d'indifférence sont construites par translation du plan à trois dimensions (U,x,y) vers le plan à deux dimensions (x0y). Le système des courbes d'indifférence représente la *carte d'indifférence.*

II212) Définition et nature des fonctions

Dans le cas de deux biens X et Y, ***la courbe d'indifférence*** est le lieu géométrique tel qu'une petite variation de la quantité d'un bien, pondérée par l'utilité marginale de ce bien, est compensée exactement par une variation identique de la quantité de l'autre bien, pondérée de la même manière.
Pour U=U(x,y), on observe donc que $\mathbf{-U'_x\, dx = U'_y\, dy \Leftrightarrow U'_x dx + U'_y dy = 0}$ (la différentielle totale est nulle)**.**
Les fonctions sont donc données sous la forme d'une ***équation différentielle*.** On détermine alors la forme des courbes (*branche d'hyperbole)* en intégrant leur équation différentielle.
Une application est :
Soit l'équation différentielle : $ydx + xdy = 0$, on en déduit : $xdy = - ydx$,
soit $dy/y = - dx/x$
La solution de cette équation est donnée par l'intégrale : $\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} + C$ (constante d'intégration)

Le résultat de cette intégration est donné dans la *table des intégrales immédiates*, soit
Log(y) = - Log (x) + Log(C) avec x et y >0

y = C/x
qui est l'expression hyperbolique de l'équation des courbes d'indifférence.
Sa valeur dépend de la constante C

En transposant ce résultat aux fonctions d'utilité, on voit que partant de la fonction
U(x,y) = xy, utilisée dans la suite en exemple, et en donnant un niveau d'utilité correspondant à $U^0 = C$, c'est-à-dire un niveau constant d'utilité, alors il vient $U^0(x,y) = C = xy$, d'où l'on déduit : y = C/x.
On peut poursuivre et retrouver l'équation différentielle puisque dans notre exemple

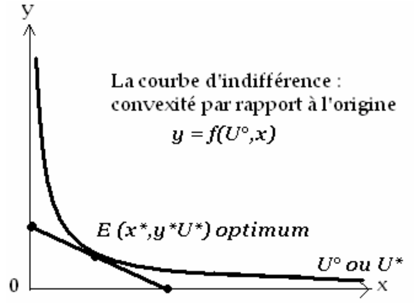
dy/dx = - C/x², ce qui implique que dy = - C/x² dx. Comme y = C/x alors en remplaçant
dy = - (y/x) dx, soit en changeant de membre $ydx + xdy = 0$
(Dans ce calcul on a utilisé dy = - C/x² ⇔ dy = C/x×x = y ×1/x = y/x).

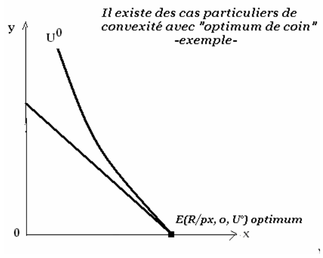
II213) Les propriétés des courbes d'indifférence

Une écriture de l'équation d'une courbe d'indifférence pour <u>un niveau constant d'utilité</u> est donc :
$U^0(x,y)$ ⇔ y = $f(U^0,x)$, le symbôle « ^{0} » pouvant être remplacé par le symbole « * », soit U*.
Les principales propriétés des courbes d'indifférence sont :

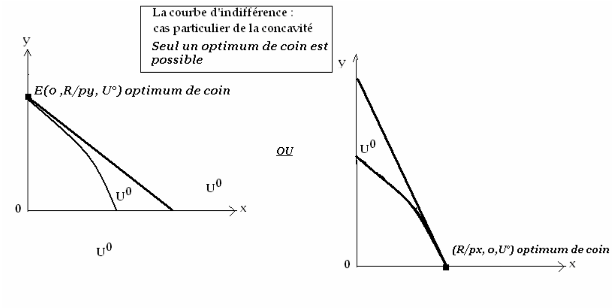
1) La monotonie, la continuité et la dérivabilité. La dérivabilité permet d'écrire que *la pente de la tangente en un point de la courbe d'indifférence est égale à l'opposé du rapport des utilités marginales des deux biens* ; soit dy/dx = - U'_x/U'_y (démonstration plus loin).
2) La convexité par rapport à l'origine (démontrée plus loin)

D'où la représentation graphique usuelle suivante :



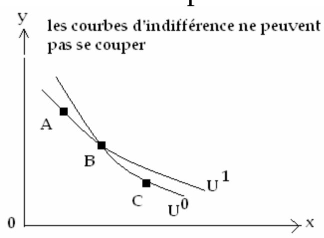


Le cas de la *concavité* existe, mais c'est un cas particulier qui ne permet pas toutes les solutions de la maximisation sous contrainte. Seule la *solution dite « de coin » peut être* retenue. On reviendra sur ce point ultérieurement. La représentation graphique est alors :



D'autres formes possibles existent, qui ont trait à des biens spécifiques.

3) Deux courbes d'indifférence correspondant à deux niveaux différents d'utilité, ne se coupent jamais. La solution représentée ci-dessous est impossible :

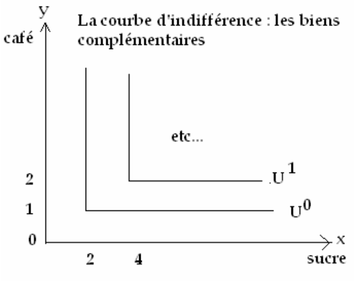


Soit 3 paniers de biens (x,y), A, B et C, et deux niveaux d'utilité tels que $U^1 > U^0$.
On lit que (A=B) > C or on constate (B=C) < A. Cette situation est contradictoire et contraire au postulat de rationalité. (NB : les symboles d'inégalité et d'égalite se lisent : « préféré à », « indifférent »).

II214) Courbes d'indifférence et types de biens

Sans prétendre épuiser ici l'exposé de la catégorisation des biens, il faut mentionner que <u>la définition des biens qui font l'objet du choix du consommateur</u> est essentielle pour interpréter économiquement les calculs réalisés à partir de la fonction d'utilité.
Une première classification concerne directement les courbes d'indifférence. Cette classification traduit la combinaison des biens X et Y réalisés par chaque consommateur. On distingue :

- ***les biens substituts ou substituables*** : ce sont des biens X et Y tels que si (δx/δ*py*) > 0, alors lorsque py croît, *y* diminue mais *x* augmente. *Les courbes d'indifférence convexes sont bâties sur cette hypothèse.* On notera que dans ce cas, les biens X et Y sont dits « substituts imparfaits ».
La parfaite substituabilité de deux biens, comme par exemple le choix entre « tournevis bleus » et « tournevis rouges », conduit à des courbes d'indifférence linéaires de pente égale à (-1). Ce qu'on appellera ci-après le taux de substitution est ici constant et égal à 1 (c'est-à-dire 1 pour 1).
- ***les biens complémentaires*** : ce sont des biens X et Y tels que si (δx/δ*py*) < 0, alors lorsque py croît, *y* diminue, mais *x* diminue. *Les courbes d'indifférence possèdent alors une allure particulière, celle d'une* équerre. La figure ci-dessous illustre le « choix » d'un consommateur entre « sucre » et « café », sachant que sa préférence le conduit à consommer 1 café = 2 sucres.
On peut alors lire que 2 cafés = 4 sucres, etc…



Cette première classification sera complétée ultérieurement lors de l'étude de *l'élasticité de la demande des biens par rapport au prix et par rapport au revenu.*

II3) Le taux marginal de substitution (ou $TMS_{y/x}$, versus $_{x/y}$)

II31) Définition

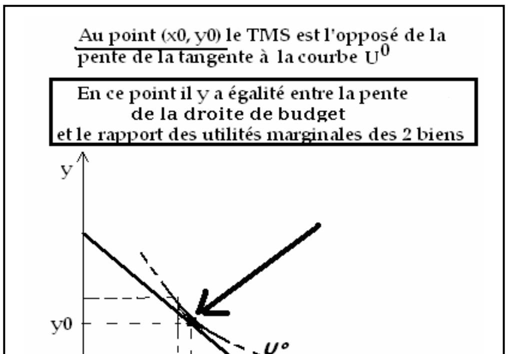
Le $TMS_{y/x}$ est le taux auquel le consommateur est disposé à substituer une quantité du bien *y* à une quantité du bien *x*, tout en maintenant sa satisfaction constante, ou tout en conservant le même niveau de satisfaction. (On définit de même $TMS_{x/y}$).
Une autre définition littérale, donnée par J. Hicks, se réfère à l'utilité marginale des biens. *« On définira le taux marginal de substitution de X à Y, comme la quantité de Y qui suffit à dédommager le consommateur de la perte d'une unité marginale de X. Cette définition ne dépend aucunement d'une mesure quantitative d'utilité ».*

II32) Calcul du $TMS_{y/x}$

Par définition du TMS, le raisonnement se tient le long d'une même courbe d'indifférence, et donc pour un niveau constant d'utilité $U = U^0$. On sait que l'équation de la courbe d'indifférence est de la forme $y = f(U^0, x)$. La dérivée en est $(dy/dx) < 0$.
On obtient alors le $TMS_{y/x}$ par la formule :

$$\mathbf{TMS_{y/x} = - (dy/dx) = U'_x/U'_y} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$$

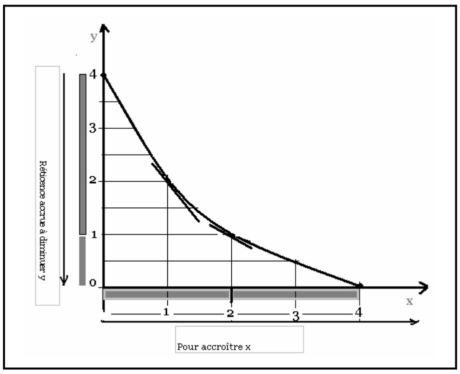
Autrement dit *le $TMS_{y/x}$ est égal à l'opposé de la pente de la tangente en un point de la courbe d'indifférence, c'est-à-dire au rapport des utilités marginale des deux biens X et Y*.
Ce que l'on peut représenter sommairement par la figure :



De cette définition, il résulte que le $TMS_{y/x}$ possède la *propriété de décroissance le long d'une même courbe d'indifférence.* Plus précisément, le $TMS_{y/x}$ décroît si *x* augmente et croit si *y* augmente.
La propriété de décroissance du $TMS_{y/x}$ peut être exprimée au moyen de l'exemple simplifié d'une fonction d'utilité quelconque à deux biens. La courbe d'indifférence est supposée prendre les valeurs (x,y) ci-dessous correspondant à 4 points :

Point de coordonnée	y	x	Δy	Δx	Δy/Δx
H	4	0			
G	2	1	-2	1	-2
E	1	2	-1	1	-1
F	0	4	-1	2	-0,5

Le rapport (Δy/Δx) est un *rapport psychologique d'échange*, et mesure la sensibilité de la variation des quantités de bien y, lorsque varient les quantités consommées du bien x.



La représentation graphique est :

Le rapport (Δy/Δx) est *décroissant* (-2, -1, -1/2). A mesure qu'il substitut des quantités de bien x aux quantités de bien y, le consommateur éprouve une réticence accrue à diminuer les quantités de bien y.
On constate ainsi que un doublement des quantités x (de 0 à 2) est d'abord du à une baisse de -3 quantités du bien y, tandis que le doublement suivant (de 2 à 4) entraîne une baisse de -1 quantité de bien y.
C'est donc la décroissance de ce rapport que traduit le $TMS_{y/x.}$
Dans le cas d'une fonction d'utilité à deux biens (x,y), la formule du $TMS_{y/x}$ est donc :
$TMS_{y/x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -(\frac{dy}{dx})$, c'est-à-dire la *valeur absolue de la pente de la tangente en un point de la courbe d'indifférence y=f(U*,x).* C'est en prenant cette valeur absolue que l'on peut établir l'égalité avec l'autre formule
$TMS_{y/x} = \frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y}$ qui représente le rapport (positif) des utilités marginales des deux biens.

II33) Propriétés du $TMS_{y/x}$
II331) Enoncé des propriétés
1° : le long d'une courbe d'indifférence le $TMS_{y/x}$ ***est décroissant***. Cette décroissance garantit la ***convexité*** des courbes d'indifférence.
2° : le corollaire de cette propriété est que : convexité des courbes d'indifférence et maximisation de l'utilité (condition du second ordre) sont un seul et même problème. C'est l'équation du TMS qui permet de le résoudre.
On se propose de montrer d'abord que la propriété implique le corollaire (de1° vers 2°), puis de montrer que le corollaire contient la propriété (de 2° vers 1°).

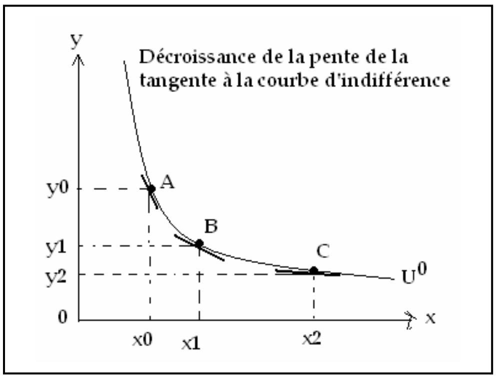
II332) Démonstration des propriétés
Démonstration de 1° et 2° (propriété 2° déduite de 1°)
Soit la fonction U=*U*(x,y). Elle admet un maximum (ou optimum) sous contrainte notée
(y= R-x*px*)/py), si, suivant la méthode du remplacement elle vérifie les deux conditions du premier et du second ordre.
On commence par l'écriture de la fonction implicite U=*U*(x, (R-x*px*)/py), sachant
y = (R-x*px*)/py ⇔ y = -x (*px/py)* + R/py
a) recherche de l'extremum ou **condition du premier ordre : dU/dx = 0**
La fonction U a pour dérivée première **(dU/dx) = U'_x + U'_y (dy/dx)** ceci en vertu du théorème de dérivation des fonctions composées.
Or, (dy/dx) = -(px/py) (pente de la contrainte).

La condition du premier ordre s'écrit alors : $(dU/dx) = U'_x + U'_y(dy/dx) = 0$
Et en remplaçant : $(dU/dx) = U'_x + U'_y(- px/py) = 0$. D'où $U'_x = U'_y\,(px/py)$.
On peut alors en déduire qu'à l'optimum :

$$U'_x/px = U'_y/py \Leftrightarrow \underline{\mathbf{U'_x/U'_y = px/py}}$$

<u>Ce résultat est une règle générale pour la maximisation de l'utilité. On lit qu'à l'optimum il y a égalité entre le rapport des utilités marginales et le rapport des prix des deux biens. Il revient au même de dire qu'à l'optimum, le TMS est égal au rapport des prix des deux biens.</u>
Cette règle, commode pour déterminer l'optimum suppose néanmoins, comme le montre la démonstration, connu le niveau d'utilité (ici $U = U^0$).
b) L'extremum est un maximum (de satisfaction) si la dérivée seconde est négative (**condition du second ordre**).
La dérivée seconde s'écrit : $d^2U/dx^2 = U''_{xx} + 2U''_{xy}\,(-px/py) + U''_{yy}\,(-px/py)^2 < 0$. Cette égalité contient des dérivées partielles croisées, dont le calcul est explicité dans la démonstration suivante (ci-dessous).
Ce résultat est effectivement en général négatif dans l'approche ordinale. Il l'est toujours dans l'approche cardinale. Lorsque il ne l'est pas, l'extremum est soit un minimum, soit inexistant. Dans ce cas, c'est que la fonction est inappropriée.
Mais dans le cas où $d^2U/dx^2 <0$, le terme U''_{xy} peut être non nul. Dans cette hypothèse, 2 cas sont possibles :
$U''_{xy} > 0$, alors $d^2U/dx^2 <0$ si U''_{xx} et $U''_{yy} < 0$ (condition nécessaire et suffisante)
$U''_{xy} < 0$, alors $2U''_{xy}\,(-px/py) > 0$
et $d^2U/dx^2 <0$ si $U''_{xx} + U''_{yy}\,(-px/py)^2 > 2U''_{xy}\,(-px/py)$.
Nous venons ainsi d'établir que la maximisation de l'utilité sous contrainte est liée au problème de la convexité des courbes d'indifférence, **<u>dépendante qu'elle est du signe de la dérivée seconde</u>**.

<u>Démonstration de 2° et 1° (</u>le corollaire contient la propriété)
Cette liaison doit pouvoir être établie « dans l'autre sens », en nous demandant ce que signifie que la courbe d'indifférence est convexe par rapport à l'origine (voir document de cours : « rappels de mathématiques »). Mathématiquement, Cela signifie que la pente de la tangente à la courbe d'indifférence doit être négative, et elle doit décroître de moins en moins à mesure que « x » croît. Soit le graphique ci-dessous (du même type que le précédent donné ci-dessus) :



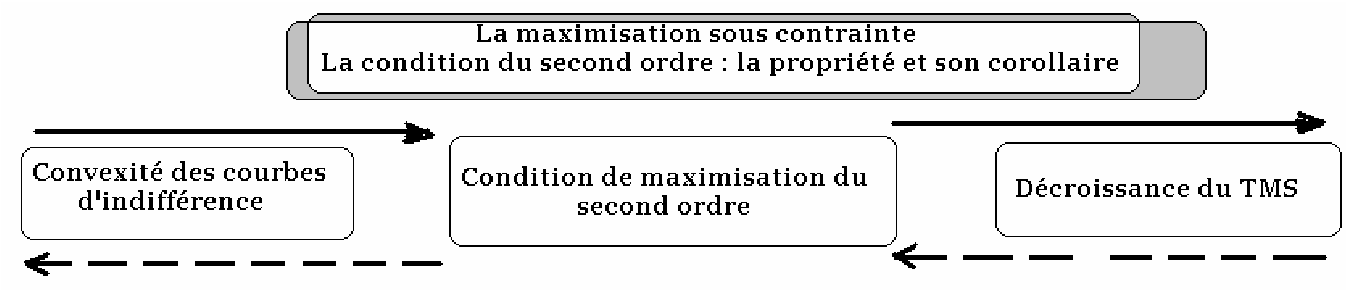
Le graphique traduit la signification économique de cette décroissance. On constate que la modification du panier de bien, de A à B puis à C, consiste pour le consommateur à substituer dans quantités de biens X aux quantités de biens Y. Mais si les quantités *y* diminuent, elles diminuent nécessairement <u>de moins en moins</u>, soit (y2-y1) < (y1-y0).
La démonstration en est :
Soit U = *U*(x,y) et y = (R-x*px*)/*py*, alors les deux conditions énoncées (y diminue, mais de moins en moins) doivent s'écrire : $dy/dx <0$ et $d^2y/dx^2 >0$.
La condition du premier ordre a déjà été démontrée, puisque $dy/dx <0 \Leftrightarrow dy/dx = - U'_x/U'_y$
La condition du second ordre est : $d^2y/dx^2 >0$ elle implique que

$$\frac{d}{dx}(- U'_x/U'_y) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(-dy/dx) < 0$$

<u>On cherche donc à vérifier le signe de la dérivée seconde</u> $d^2y/dx^2 > 0$ sachant $dy/dx = - U'_x/U'y$.
Il s'agit de dériver un rapport de fonctions (*u/v*) sachant qu'elles sont composées, c'est-à-dire fonction de « x » et de « y(x) ». On sait que la dérivée seconde est du type $[(u'v - uv'/v^2]$. En appliquant la formule on obtient, en mettant et conservant le numérateur entre crochets

$$d^2y/dx^2 = -\ 1/(U'_y)^2\ [\ \underbrace{(U''_{xx} + U''_{xy}\ dy/dx\ )U'_y}_{u'v} - \underbrace{(U''_{yy}\ dy/dx + U''_{yx})\ U'_x}_{uv'}]$$
$$v^2$$

Comme $dy/dx = -\ U'_x/U'_y$, en remplaçant on a :
$dy/dx = -1/\ (U'_y)^2\ [\ U''_{xx}\ U'_y + U''_{yy}\ ((U'_x)^2/U'_y) - 2\ U''_{xy}\ U'_x]$
En multipliant et en divisant par U'_y, on obtient :
$d^2y/dx^2 = -1/\ (U'_y)^3\ [\ U''_{xx}\ (U'_y)^2 - 2\ U''_{xy}\ U'_x\ U'_y + U''_{yy}\ ((U'_x)^2] \Rightarrow d^2y/dx^2 < 0$ si [.......] < 0
Sachant que $U'_x/U'_y = px/py$ on peut remplacer $U'_x = (px/py)\ U'_y$. On est alors à un maximum de satisfaction si l'expression entre crochets [.......] <0 et dans ce cas ***la courbe d'indifférence est convexe,*** d^2y/dx^2 étant positif.
Conclusion
L'équation du TMS est : $TMS_{y/x} = -\ (dy/dx) = U'_x/U'_y$, et la condition de décroissance du TMS est : $d/dx\ (-dy/dx) < 0$, on retrouve alors le résultat de la démonstration précédente. Ce qui permet de conclure à la similitude des démonstration, la flèche du schéma ci-dessous signifiant *« même chose que »*, et ceci sans restriction sur le signe des dérivées partielles croisées.



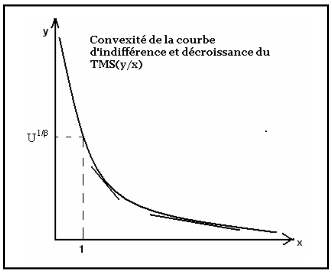
II333) Application de la démonstration à l'exemple de la fonction d'utilité $U=U(x,y) = x^\alpha y^\beta$

Le But : démontrer que la convexité de la courbe d'indifférence (*pente négative)* est équivalente à *la décroissance du* $TMS^{y/x}$

Soit la fonction $U=U(x,y) = x^\alpha y^\beta$ avec α et β > 0

1) Equation de la courbe d'indifférence $U^*=U^*(x,y)$ sous la forme $y=f(U^*,x)$
On utilise les propriétés de la fonction puissance, soit : $x^{-n} = 1/x^n$ et $x^n = a \Leftrightarrow x = a^{1/n}$
$U^*=U^*(x,y) \Rightarrow y^\beta = U^*/x^\alpha$, soit si $(U^*/x^\alpha) = a$, alors $y^\beta = a \Leftrightarrow y = a^{1/\beta}$
$\Rightarrow$ $y = (U^*/x^\alpha)^{1/\beta} = U^{*1/\beta} / x^{\alpha/\beta}$ en appliquant la propriété $x^{-n} = 1/x^n \Rightarrow \mathbf{y = U^{*1/\beta} \times x^{-\alpha/\beta}}$

2) La dérivée de la courbe d'indifférence (*dy/dx)*, sachant $(ax^n)' = nax^{n-1}$
$dy/dx = -(\alpha/\beta)\ U^{*1/\beta}\ x^{-(\alpha+\beta)/\beta}$ (on a en effet : $x^{-\alpha/\beta}$ or en dérivant l'exposant devient $(-\alpha/\beta - 1) = -\ (\alpha/\beta - \beta/\beta) = -(\alpha+\beta)/\beta$
La pente de la courbe d'indifférence est donc négative. Ce qui permet de conclure à la convexité de la courbe d'indifférence, puisque la courbe est décroissante et
$$y \to 0\_quand\_x \to +\infty$$
$$y \to +\infty\_quand\_x \to 0$$
La courbe est donc asymptotique au axes prenant la valeur $U^{1/\beta}$ quand x = 1 puisqu'elle a pour équation $y = U^{*1/\beta} / x^{-\alpha/\beta}$. Soit :



3) Le $TMX_{y/x}$
Il est égal au rapport des utilités marginales. Celles-ci sont déterminées à partir de
$U=U(x,y) = x^\alpha y^\beta$
Soit : $TMS_{y/x}$ = $TMS_{y/x} = \dfrac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}y^\beta}{\beta y^{\beta-1}x^\alpha}$ la simplification de cette expression par les exposants, laisse l'exposant (-1), lequel fait changer de membre à la variable, soit :

$$TMS_{y/x} = \frac{\alpha x^{-1}}{\beta y^{-1}} = \frac{\alpha y}{\beta x}$$

Par conséquent : $TMS_{y/x}$ décroit si *x* augmente et croit si *y* augmente. Le long de la courbe le $TMS_{y/x}$ possède la propriété de décroissance.

II34) La maximisation sous contrainte

Le présupposé de la maximisation sous contrainte vient d'être démontré. Il suffit en effet de supposer que les courbes d'indifférence sont convexes par rapport à l'origine, ne se coupent pas, pour rechercher l'existence d'un extremum. Cette recherche se réalise dans le plan à deux dimensions (y0x. Ce plan est celui de la carte d'indifférence et de la droite de budget (ou de la famille de droites de budget, si on admet plusieurs hypothèses relatives à R, px, et py comme ici).

1) **Application des deux méthodes de maximisation (Remplacement et Lagrangien) : L'exemple de la fonction U= *U*(x,y) = x.y . Le graphique de la maximisation sous contrainte : présentation générale**

Les encadrés ci-après comportent les réponses aux trois questions posées sur l'exemple de la fonction U = x.y. Nous nous intéressons ici seulement aux deux premières questions et à une partie du commentaire demandé à la question 2.

Théorie du comportement du consommateur
L'exemple de la fonction d'utilité U = *U*(x,y) = x.y

Enoncé : soit la fonction d'utilité U=U(x,y) = xy, d'un consommateur disposant d'un revenu R_0 = 100, intégralement dépensé. Les prix p_x et p_y sont égaux à 5. Le revenu et les prix changent comme indiqué dans les 4 situations (de R0 à R3) du tableau ci-dessous.

Question 1 : compléter le tableau, d'abord en appliquant les deux méthodes d'optimisation (remplacement et Lagrangien) pour déterminer l'optimum Ω_0 correspondant à la situation où R_0 = 100.
Question 2 : Compléter ensuite le tableau de la même manière pour les situations R_1 à R_3.
Enfin, dans le plan (yOx) représenter les 4 droites de budget, et situer chaque optimum en représentant chaque courbe U=xy pour U=U* (satisfaction optimale) à l'aide de quelques coordonnées (échelle : 1cm = 5 unités)(*). *Commentez le graphique*.
Question 3 (relative au § IV323) : Tracez la courbe de demande du bien X (q_x=*f* (px)), après avoir étudié les conséquences de trois variations successives du prix du bien x (*px*= 10 puis =5, puis =2), sachant que le revenu et le prix de y sont constants : R=100 et *py*=5.

U=U(x,y) = xy					
		R0=100	R1=150	R2=200	R3=R2=200
px		5	5	5	2
py		5	5	5	5
contrainte budget					
R/px =					
R/py=					
Optimum	*x* * =				
	y * =				
	*U**=				

(*) Les propriétés de ces courbes ont été étudiées au paragraphe II21.

<u>Réponse à la question 1</u> : Ω_0 par le remplacement.

La méthode du remplacement consiste à écrire la fonction implicite U=*u*(x, (R-x*px*)/*py*) étant donné l'équation de la contrainte de budget : R = x*px* + y*py* ===> y = -x (px/py) + (R/py)

La contrainte est ici : R = 5x + 5y ➔ y = -x(5/5) + (R/*py*). Or, R=R_0 = 100. D'où :

$y_{0\,=\,-}\,x_0\,(5/5) + 100/5 \Leftrightarrow y_0 = -x_0 + 20$

La fonction implicite s'écrit alors $U^0 = U^0\,(x_0, -x_0 + 20)$

Comme U=*U*(x,y) = xy, alors $U^0 = x_0\,(-x_0 + 20) = -x_0^2 + 20x$

La fonction U^0 admet un extremum lorsque $U^{0\prime} = (dU^0/dx) = 0$. Soit $U^{0\prime} = -2x_0 + 20 = 0$, égalité vérifiée pour x=10. On en déduit y_0, les quantités demandées de Y, en remplaçant x_0 par sa valeur dans la contrainte, laquelle devient : $y_0 = x_0 + 20 = (-10) + 20 = 10$.

Ainsi pour un revenu R_0, le consommateur atteint un optimum de satisfaction (Ω0) avec le panier de biens (x,y) = (10,10), au prix *px*=5 et *py*=5. Le niveau de satisfaction atteint est alors $U^0 = x_0y_0 = 10\times10 = 100$.

La fonction U^0 admet un maximum lorsque $U^{0\prime\prime} < 0$. On verifie que $U^{0\prime} = -2x_0 + 20$ a bien pour dérivée $U^{0\prime\prime} = -2 < 0$.

L'optimum recherché est donc $\Omega_0\,(U^0, x_0, y_0) = (100,10,10)$.

Ω_0 par le Lagrangien. Soit le programme du consommateur :

Max U= xy

Sc : R-x*px*-y*py* = 0 soit ici (100 – 5x -5y = 0)

Le Lagrangien s'écrit : Z(x,y,λ) = U(x,y) + λ (R-x*px*-y*py)* ⇔ xy +λ (100 – 5x -5y)

Le système des dérivées partielles annulées simultanément (<u>ou condition du premier ordre</u>) s'écrit :

δZ/δx = y – 5λ = 0 (1)

δZ/δy = x – 5λ = 0 (2)

δZ/δλ = 100 – 5x – 5y = 0 (3)

de 1) on déduit (1') : y = 5λ ; de (2) on déduit (2') : x =5λ ; de (1') et (2') on conclut à l'identité x=y.

En remplaçant y par x dans (3) on a : 100 – 5x – 5y = 0 ⇔ 100 – 10x = 0 d'où x = 10 et donc y=10. Le Lagrangien λ = y/5 = 10/5 = 2. Le niveau d'utilité alors atteint est : U =xy = 10×10 = 100.

On considère la condition du second ordre. Elle consiste à écrire la *matrice Hessienne* (H), pour vérifier que son déterminant appelé **|D²|** est de signe *positif*. On dérive pour cela chacune des dérivées de la matrice jacobienne précédente par rapport à x, y et λ. La matrice (H) comporte donc des dérivées d'ordre 2. Soit : (δ²Z/δx²) pour la première colonne), (δ²Z/δy²) seconde colonne, et (δ²Z/δλ²) en troisième colonne. On obtient alors :

$$\boxed{\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -5 \\ -5 & -5 & 0 \end{pmatrix}}$$

Le calcul du déterminant **|D²|** est celui d'une matrice d'ordre 3. On l'obtient comme ceci : si par exemple la matrice d'ordre 3 est :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Et **|D²|** possède la même expression avec un encadré, et donne lieu au développement suivant :

$$|D^2| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\times(ei-fh) - b\times(di-fg) + c\times(dh-eg)$$

En appliquant ce développement à la matrice de l'exercice, on obtient :

|D²| = 0 × [(-25)] -1 ×[0 – 25] + (-5) [-5-0 = 25 + 25 = 50. On constate que le déterminant défini |D²| > 0. L'extremum est donc bien un *maximum.*

Réponse à la question 2 : Conséquence des changements de revenu :R1=150 puis R2=200 et R3=R2 mais p_x= 2).

Les conséquences des modifications du revenu à prix constants (R1 puis R2) ou variable (R3=R2 mais p_x= 2) ne sont envisageables qu'en déterminant les nouveaux optima Ω1, Ω2 et Ω3. Comparativement il sera possible d'expliquer l'effet observé.

Par conséquent le calcul précédent de la maximisation sous contrainte est à répéter trois fois, pour une contrainte R_1=150, puis R2=200 et R3 = R2 mais p_x =2.

Compte tenu de la méthode du remplacement, il est possible de ne repartir que de la dérivée dont l'expression générale est U' = -2x +R/5. En remplaçant R par ses valeurs successives on obtient les deux nouveaux optima.

Si R_1=150 alors $U'^1 = -2x1 + 150/5 = -2x1 + 30$; et $U'^1 = 0$ est vérifié pour $x_1 = 15$. La contrainte y_1 étant $y_1 = - x_1 + 30$, en remplaçant il vient $y_1 = -15+30 = 15$. Le niveau de satisfaction alors atteint est : $u_1 = 15 \times 15 = 225$. L'optimum du consommateur est donc sous l'hypothèse R_1 : $\Omega_1 (U^1, x_1, y_1) = (225,15,15)$.

Le graphique permet de constater que Ω_1 est un point de tangence entre la nouvelle contrainte de budget et la courbe d'indifférence U^1. Par les mêmes calculs, on obtient pour R= R_2 =200 les résultats suivants :

$$\Omega_2 (U^2, x_2, y_2) = (400,20,20).$$ Graphiquement le constat est identique.

Il en est de même pour la situation $R_3 = R_2 = 200$, en remarquant toutefois que p_x à diminué de 5 à 2 (ce qui modifie la pente $(-p_x/p_y)$ de la droite de budget R_3.

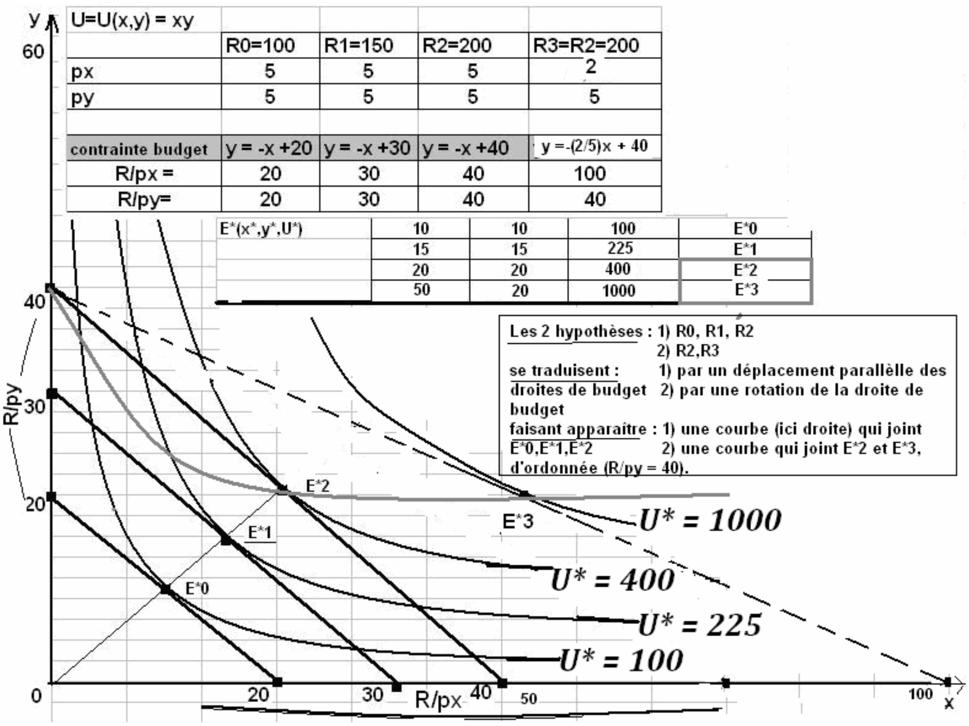
L'optimisation a alors pour résultat $\Omega_3 (U^3, x_3, y_3) = (1000,50,20)$. Le constat graphique reste le même à une nuance près, celle de la rotation de la droite de budget autour de R/p_y au lieu d'un déplacement parallèle comme dans les situations précédentes.

Le graphique de la maximisation sous contrainte a alors la forme suivante

Les hypothèses de prix (px et py) et de revenu (R0 à R3) ont permis de calculer les valeurs ci-dessous et de situer l'optimum (symbolisé ici par E au lieu de Ω) au point de tangence de chaque droite de budget et de la courbe d'indifférence correspondante.

Pour une représentation graphique précise de cette maximisation sous contrainte, il est nécessaire de représenter la courbe d'indifférence U^*. On sait que U = xy, on en déduit l'équation de cette courbe : $y = U^*/x$; et par exemple si U^*=100, alors l'équation de la courbe d'indifférence est : y = 100/x.

On omettra ci-dessous de rappeler cette précision pour n'indiquer que le niveau U* en légende dans le but de simplifier la représentation.



Commentaire de conclusion relatifs au § II34):

Les hypothèses successives de l'exercice se traduisent donc :

-par des mouvements appropriés des droites de budget : déplacements parallèles (hypothèses 2 et 3) et rotation (hypothèse 4),

-par des modifications de la combinaison optimale et donc du niveau de satisfaction U= U*

Ce sont ces modifications qu'il s'agira dans la suite du cours d'interpréter dans le cadre d'une « théorie de la demande ».

<u>Commentaire de conclusion</u> relatifs au § IV23):

L'interprétation du graphique porte plus précisément sur la droite (jusqu'à E2) qui joint les optima (E).

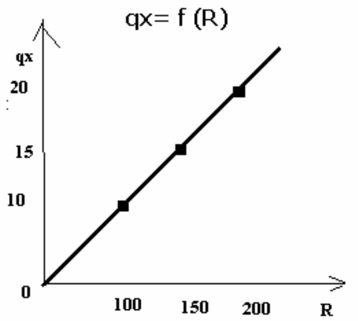
Le cours a montré qu'une telle représentation est typique d'un *effet revenu*, et donc que la courbe qui joint les optima est *la courbe de revenu consommation ou pseudo courbe d'Engel.* On remarque la pente identique des trois droites de budget (raisonnement à prix constant).

Au-delà on peut ajouter que le graphique montre que la *demande des deux biens* X et Y, croît en raison directe du revenu (R). Autrement dit q_x et q_y croissent avec R. Cette relation, appliquée par exemple à q_x peut être représentée dans un graphique spécifique, par projection des points du graphique des optima. On lit dans celui-ci les coordonnées suivantes :

q_x =	10	15	20
R =	100	150	200

D'où la représentation de la quantité demandée du bien X en fonction de R.

Droite d'Engel
Du bien X
qx = f(R)



<u>Réponse à la question 3</u> <u>(relative au § IV3)</u> : Conséquences des variations du prix *px* sur la demande de X, R et py étant constants.

On détermine q_x = *f*(px) lorsque R =100 et *py*=5, donnés. Trois variations successives de *px* sont proposées : *px* = 10 puis 5, puis 2. La fonction d'utilité du consommateur est toujours : U=xy.

Comme précédemment on ne peut faire de commentaires sans avoir calculé les équilibres du consommateur. Il faut donc à nouveau déterminer par la méthode du remplacement **Ω**0,**Ω**1,**Ω**2, correspondants aux situations px_0, px_1,px_2, respectivement égaux à 10,5,2.

<u>Si px_0=10</u>

La contrainte est $y_0 = -x_0\ (10/5) + 100/5 = -2x_0 + 20$

Par remplacement on est conduit à vérifier la condition du premier ordre en annulant la dérivée $U'_0 = -x_0+5$. Cette condition est réalisée pour x=5 et donc y = 10 et U_0= 50. La combinaison (5,10) est donc un extremum de satisfaction. La dérivée seconde ($U_0'' = -1$) étant négative, l'extremum est un maximum.

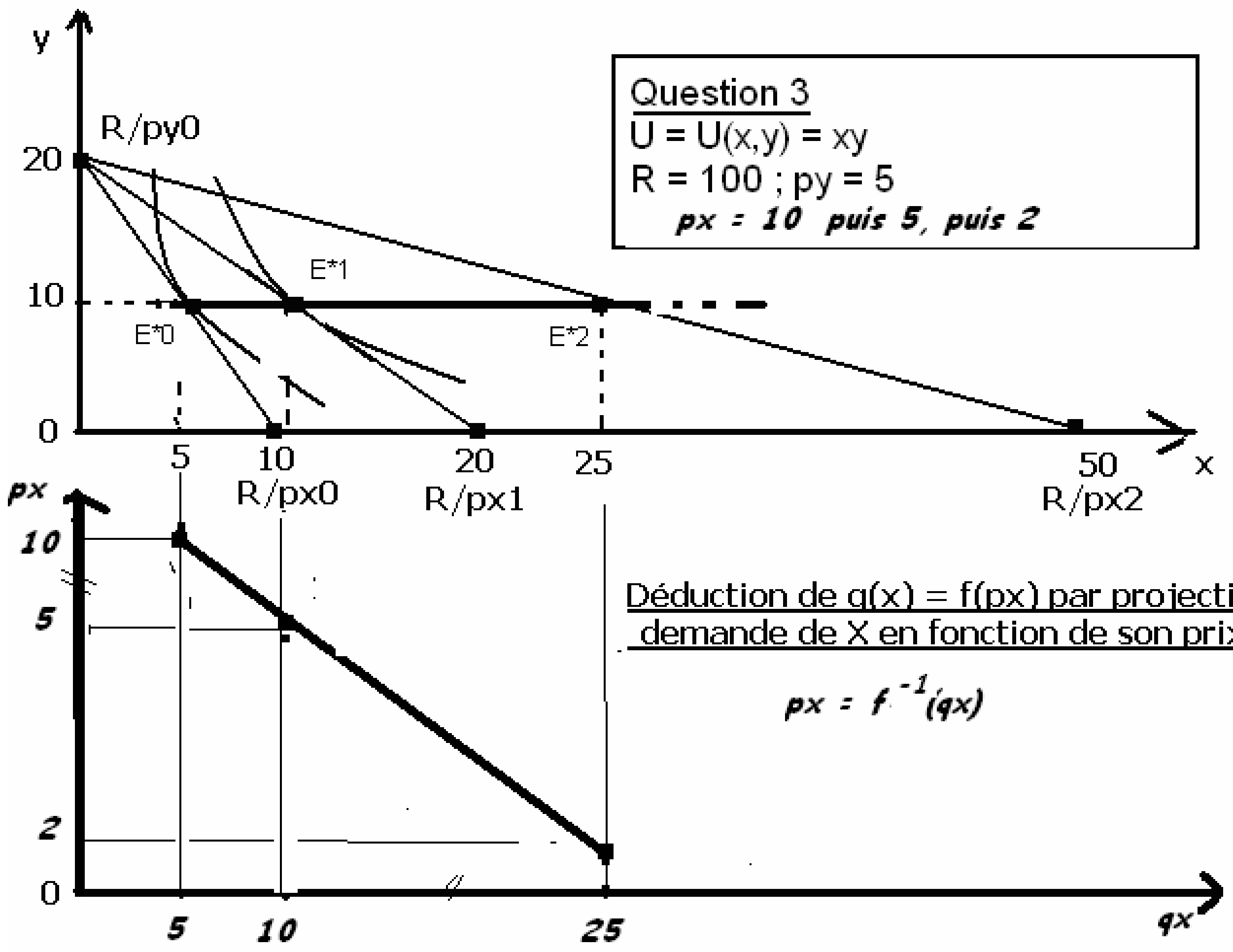
L'optimum s'écrit : $\Omega_0\ (U^0, x_0, y_0) = (50,5,10)$.

<u>Si px_1 = 5</u>, les résultats sont : $\Omega_1(U^1, x_1, y_1) = (100,10,10)$.

<u>Si px_2 = 2</u>, les résultats sont : $\Omega_2(U^2\ x_2, y_2) = (250,25,10)$.

<u>L'interprétation du graphique supérieur porte précisément sur la droite qui joint les optima</u>

<u>(cf graphique ci-dessous)</u>



Le cours a montré qu'une telle représentation est typique d'un *effet prix global*, et donc que la courbe qui joint les optima est ***la courbe de prix consommation*** **(CPC)** ***ou courbe d'effet prix.*** On remarque la pente différente des trois droites de budget (raisonnement à prix *px variable)*, et la rotation de ces droites autour du point d'ordonnée (R/py_0, ces deux grandeurs étant fixes). Ce graphe montre que le consommateur accroît la quantité demandée du bien X, lorsque son prix diminue, en maintenant constantes et égales à 10 les quantités y. Ce qui revient à constater, à propos du bien X, que sa demande vérifie la loi de la demande (q_x croît lorsque *px* décroît et inversement). On doit pouvoir le vérifier en représentant graphiquement la courbe de demande, par projection des points du graphique supérieur vers le graphe de $q_x = f(px)$ (en inversant toutefois les axes).

III) Les courbes de demande du consommateur

III1) Définition de la fonction de demande

La fonction de demande du consommateur « ***i*** » pour le bien « **x** » s'écrit : $\mathbf{q_d^i\,(x) = f(\,px,py,R,\ldots)}$

$\mathbf{q_d^i\,(x)}$ est identique à $\mathbf{q^d(x)}$ ou $\mathbf{q(x)}$ ou encore $\mathbf{q_x}$. On utilise l'écriture la plus simple, une fois qu'elle est comprise. Les variables désignent respectivement :

x = la quantité du bien X demandée par le consommateur

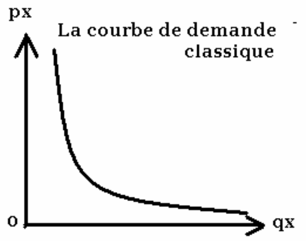
R = le revenu du consommateur

px = prix du bien x

py = prix du bien y.

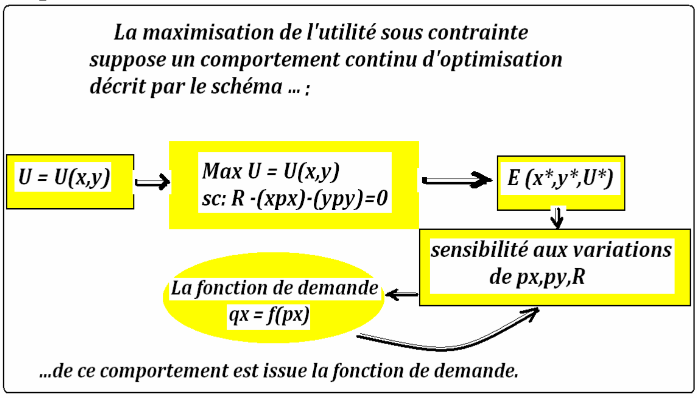
Il s'agit donc d'une fonction à plusieurs variables On la lit ainsi : ***la quantité demandée du bien X par le consommateur est fonction du prix de ce bien (px), mais également du prix des autres biens (ici : py) et du revenu du consommateur***. Lorsque py et R sont fixés, alors la fonction de demande est une fonction à une seule variable, le prix de X soit : **q(x) =** ***f(px).*** *On trouve la définition suivante dans Handerson et Quandt : « la courbe de demande du consommateur pour un bien indique la quantité qu'il achètera en fonction du prix de ce bien ».*

On comprend d’autant mieux ce qu’est la demande du consommateur, lorsqu’on saisit qu’elle est obtenue en supposant de la part du consommateur ***un comportement continu d’optimisation*****. Autrement dit lorsqu’on la génère à partir de la fonction d’utilité**.
Car la courbe représentative de **q(x) = *f(px)*** ci-dessous**,** très connue, est une construction dont l’amont est *l’optimisation de l’utilité*. Il importe donc de savoir la générer.



III2) De la fonction d’utilité à la fonction de demande

III21) La méthode
Delaunay et Gadrey adoptent cette démarche. Ils écrivent : *« La méthode suivie consiste bien à construire un comportement théorique de demande, à partir du comportement ‘’essentiel du consommateur, pour le confronter aux faits’’ ».*
Explicitons ceci en nous référant à l’exposé du paragraphe I. La citation signifie d’une part que la construction de la courbe de demande résulte de la maximisation de l’utilité sous contrainte. D’autre part, que la sensibilité de cette courbe ‘’aux faits’’ , <u>c'est-à-dire aux variations des autres variables que *px*</u>, dépend de la fonction elle-même.
On peut schématiquement représenter la méthode de la manière suivante :

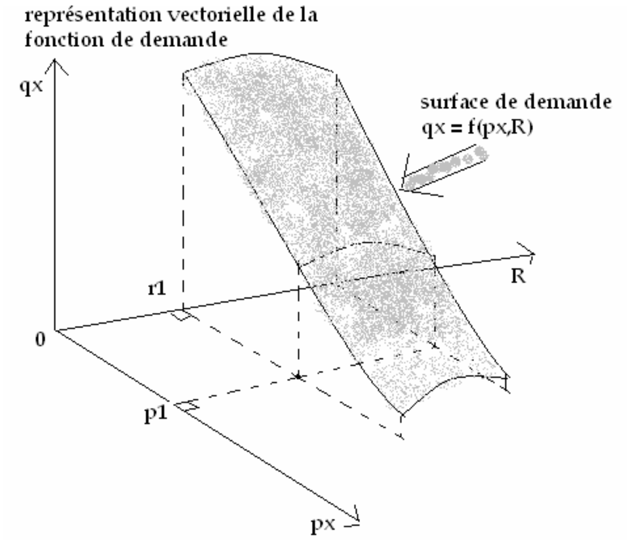


III22) Représentation vectorielle de la fonction de demande
Soit la fonction de demande du bien X : $q_x = f(px, R)$ où *px* = prix du bien X, et R= revenu du consommateur

Hypothèse ou postulat fondamental :

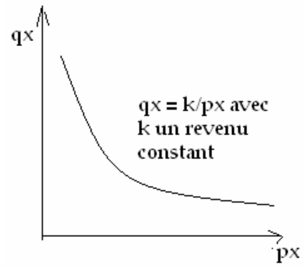
$$\boxed{\frac{\delta q_x}{\delta px} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta q_x}{\delta R} > 0}$$

<u>La quantité demandée du bien X varie en raison inverse de son prix (px), et en raison directe du revenu</u>* <u>(R).</u> *<u>La première proposition est souvent appelée « loi de la demande ».La seconde définit les biens normaux.</u>
On pourra vérifier ci-après la validité de cette hypothèse, en montrant notamment que la situation opposée existe et possède un sens.
Si nous considérons *px* et R comme des variables indépendantes nous pouvons représenter
$q_x = f(px, R)$ dans <u>un espace à trois dimensions : la variation de la quantité demandée étant fonction à la fois du Revenu et du prix du bien.</u>



Dans l'espace à trois dimensions la fonction de demande est représentée par une **surface de demande**. Cette surface est conforme à l'hypothèse fondamentale. La demande de X (qx) croît avec le revenu (partie haute de la surface) et décroît lorsque le prix augmente (partie basse de la surface). Toutefois on raisonne le plus souvent avec **R donné (soit R = k une constante**).

On démontre alors que la fonction qx = *f(*px, k) est de la forme hyperbolique : qx =k/*px* (voir plus loin). Sa représentation, la plus courante (lisible dans l'espace à trois dimensions ci-dessus si par exemple R = r1) est donc schématiquement celle de la courbe « classique » :



Ces représentations ne démontrent cependant pas que la demande doive être construite à partir des effets sur l'optimum du consommateur, dus aux changements dans le revenu et les prix. Ce sont ces effets qu'il faut donc exposer.

IV) L'analyse des effets ou variations de R et py

IV1) Définitions

a) On appelle *« effet revenu »*, le déplacement subi par l'optimum consécutivement à une variation du revenu du consommateur pour *px* fixé (et *py* donné).

On étudie alors $q_x = f(\text{px}, R)$ pour *px* fixé et tel que *px*=p1

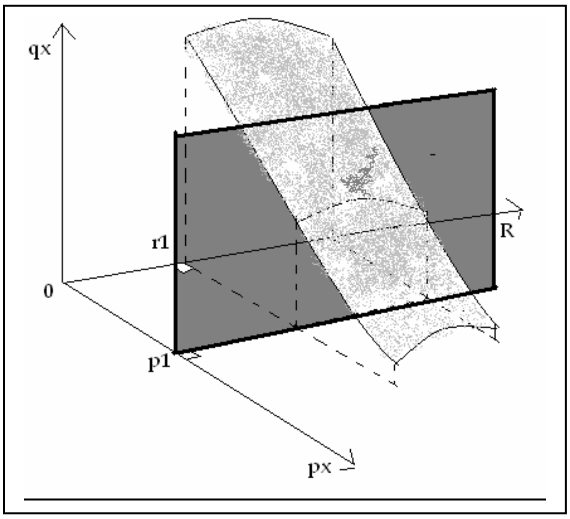
b) On appelle *« effet prix »*, le même déplacement, mais consécutif cette fois à une variation du prix *px*, pour un revenu R constant et py fixé.

On étudie alors $q_x = f(px, R)$ pour R fixé et tel que R = R1.

Une démonstration importante permet de **définir *l'effet prix* comme la somme de deux effets : *l'effet de substitution*** et ***l'effet de revenu* (soit EP = ES + ER)**. Cette démonstration est appelée équation de Y. Slutzky –Hicks. On la démontrera en suivant les deux hypothèses (celle de Slutzky et celle de Hicks)..

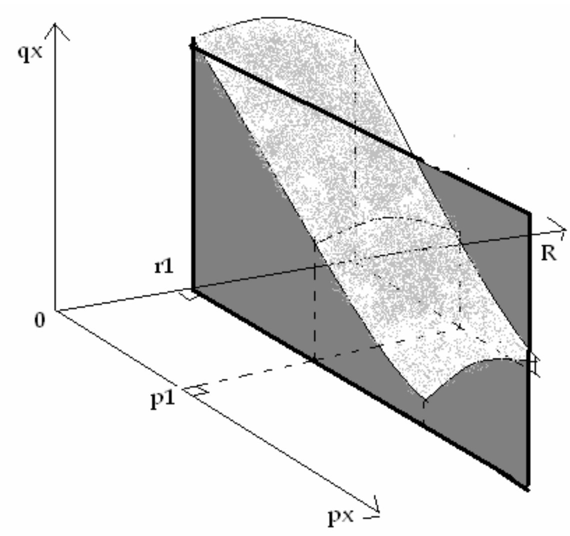
c). dans l'espace vectoriel présenté plus haut (q_x,R, px) il est possible d'illustrer (de façon approximative) les images des fonctions pour lesquelles *px*=p1, ainsi que celles pour lesquelles R=R1.

La première **(*px*=p1)** est donné par l'intersection de la surface de demande est des plans perpendiculaires à (p0*x), soit :*

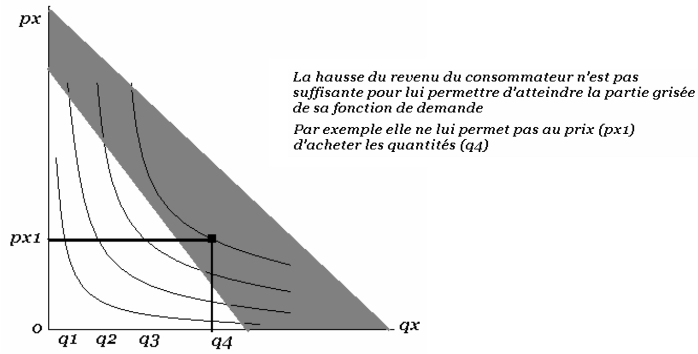


La surface de demande dans un espace à 3 dimensions lorsque le prix px = p1 donné, et R variable.

La seconde ***(R=R1)*** est donnée par l'intersection de la surface de demande et des plans perpendiculaires à (R*).* Il suffit de faire varier R1 à la hausse par exemple pour empiéter sur la surface définie, *soit :*



La surface de demande dans un espace à 3 dimensions lorsque le revenu R = r1 donné, et px variable. Elle prend cette forme dans l'ensemble du plan (q_x,0,R,p_x). On peut lire que le consommateur ne peut accroître sa demande $q_x = f(p_x)$ au-delà de certaines quantités et de certains prix.
Dans le plan à deux dimensions cela revient à limiter la croissance (le déplacement vers le haut et la droite) de la courbe de demande, soit :

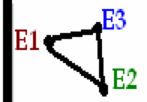
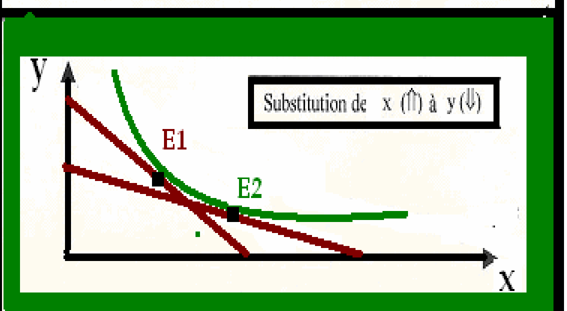
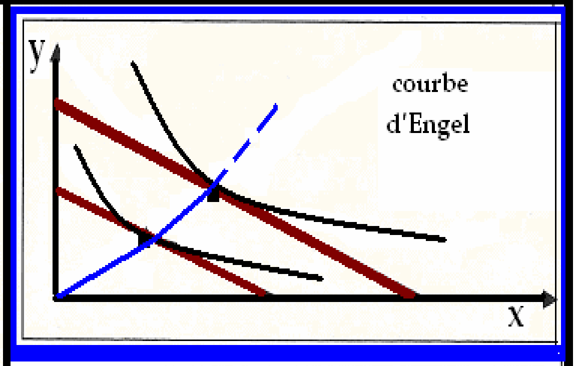
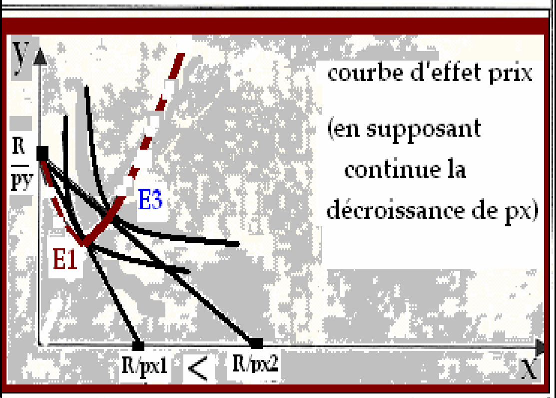


d) **Le tableau des effets** : Un résumé concis des trois effets peut être réalisé sous la forme du tableau suivant que nous nommons « tableau des effets ». Il est utile en cas d'hésitation sur l'une ou l'autre partie des définitions données ci-dessus (le symbole « E » a remplacé « Ω » pour désigner l'optimum). Il est étudié en cours sous forme de diapositives *powerpoint*.

On étudie ensuite dans les paragraphes IV2, IV3 et IV4 chacun des effets séparément, à l'aide d'applications. Les graphiques utilisés sont hypothétiques et dépendent chaque fois de l'énoncé de l'exercice (type de fonction d'utilité, contrainte, prix des biens etc…).

LE TABLEAU DES EFFETS : SUBSTITUTION, REVENU, ET PRIX

TABLEAU DES EFFETS : substitution, revenu, et prix

Changement d'optimum 	VARIABLES STABLES	VARIABLES MODIFIEES	NOM ET DEFINITION DE L'EFFET	REPRESENTATION GRAPHIQUE
E1 à E2	px ou py U	px ou py modification du prix relatif R	**SUBSTITUTION** LE PASSAGE DE E1 à E2 s'effectue sur la même courbe d'indifférence. Ou : *le lieu des combinaisons assurant le même niveau de satisfaction (puisqu'il s'agit d'une substitution d'un bien à un autre) est LA COURBE D'INDIFFERENCE FIXEE.*	
E2 à E3	px et py	R U	**REVENU** Déplacement parallèle des droites de budget vers le haut (si R augmente), tangentes aux courbes d'indifférences successives en E2, E3.... (si on suppose n variations du revenu). En reliant ces points on obtient une droite qui décrit l'effet de revenu. On peut alors adopter la définition suivante : *Le lieu des points de tangence entre la famille des droites budgétaires de même pente et le système des courbes d'indifférence est* LA COURBE D'ENGEL, ou COURBE DE REVENU CONSOMMATION, ou COURBE DE NIVEAU DE VIE.	
E1 à E3	px ou py R	px ou py modification du prix relatif U	**PRIX** Les droites de budget pivotent autour d'un point d'ordonnée (R/py) si py est constant. A mesure des variations du prix de X, plusieurs courbes deviennent tangentes aux courbes d'indifférence successives (vers le haut si px diminue). On peut alors adopter la définition suivante : *Le lieu des points de tangence entre la famille de droites budgétaires passant par le même point A (0, R/py) et le système des courbes d'indifférence est LA COURBE DE PRIX CONSOMMATION ou COURBE D'EFFET PRIX.* Par définition l'effet prix est la SOMME DES DEUX EFFETS PRECEDENTS (un même graph permet de	

A chaque effet correspond bien une courbe. Toutefois ce sont les préférences et le revenu du consommateur, ainsi que les prix de marché qui déterminent la pente de ces courbes. Elles peuvent donc changer d'allure.

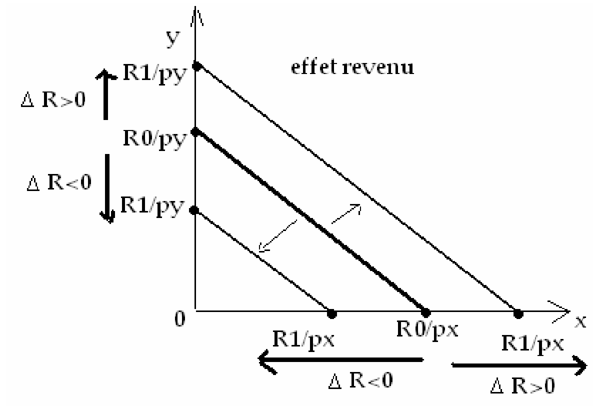
IV2) L'effet revenu (ER)

IV21) La contrainte de budget et ses déplacements lorsque R varie.

On considère la contrainte de budget de la forme y = -x (*px/py)* + R/*py*

Si *px* et *py* sont donnés et R variable (de R0 à R1), deux cas sont possibles : soit R1>R0, soit R1<R0. Dans les deux cas la droite de budget subit un déplacement *parallèle*, puisque sa pente est inchangée (-*px/py* constant). Ce qui est conforme à ce que nous avons déjà vu, et donne lieu à la représentation dans le plan (y0x) :

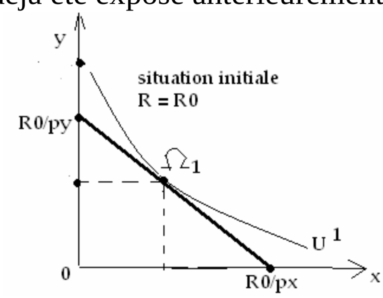
Si *px* et *py* sont donnés et R variable de R0 à R1 en considérant 2 cas : R1>R0 et R1<R0



IV22) Conséquences sur l'optimum et la quantité demandées des biens X et Y

Soit un optimum initial Ω1, pour lequel la demande du consommateur est (x1,y1) avec un revenu R = R0. On suppose que le niveau d'utilité alors atteint est U= U^1. Le graphique représentatif de cette maximisation sous contrainte (R0) a déjà été exposé antérieurement. Il est le suivant :

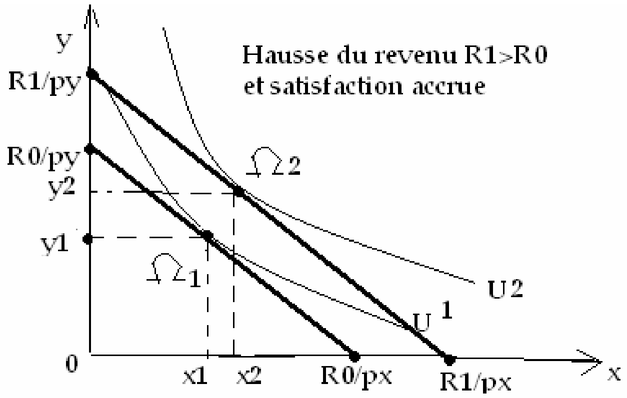
Optimum sous contrainte avec R=R0



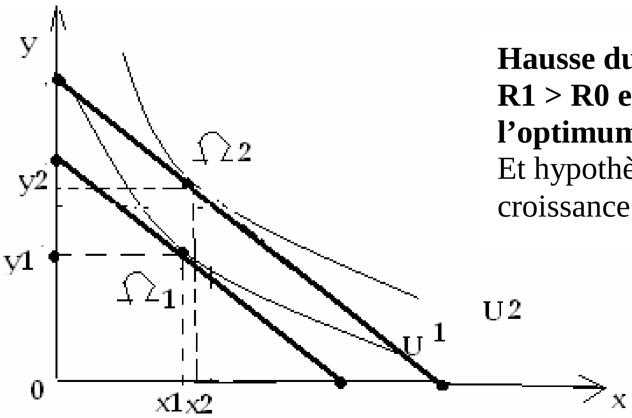
On introduit les variations de R pour en examiner les effets sur la demande des biens. Les cas envisageables étant nombreux, supposons que les biens X et Y sont « *normaux* » (leur demande vérifie le postulat fondamental) et que le nouveau revenu R1 > R0.

Suivant l'effet revenu (ci-dessus) le déplacement parallèle vers le haut a pour conséquence une croissance de la demande des deux biens. L'optimum sera atteint par conséquent au point de tangence de la droite de budget (R1) et d'une courbe d'indifférence (U^2) supérieure à U^1. Le nouvel optimum Ω2 de coordonnées (x2, y2) traduit donc une satisfaction supérieure à Ω1 de coordonnées (x1,y1). Ce que montre la représentation ci-dessous :

Hausse du revenu R1 > R0 et déplacement de l'optimum de Ω1 à Ω2



Dans ce graphique, il faut considérer le rapport (y2-y1)/(x2-x1) comme arbitraire. On a suggéré ici une croissance quasi proportionnelle des quantités des deux biens. Or, il se pouvait fort bien que l'on observe un rapport plus élevé, comme par exemple à une croissance nettement supérieure des quantités y et une faible croissance de x. Dans ce cas évidemment les positions des optima aurait changé comme ceci :



Hausse du revenu
R1 > R0 et déplacement de l'optimum de Ω1 à Ω2
Et hypothèse d'une moindre croissance des quantités « x »

<u>Ce qui permet d'affirmer l'importance des changements ou variations de l'optimum</u>. Ces changements doivent être considérés comme la traduction des variations du revenu à prix fixes, et pour une carte d'indifférence, ou une fonction d'utilité donnée, celle du consommateur *« i »*. C'est le concept et la mesure de *l'élasticité de la demande* par rapport au revenu (*Cf* § V ci-après) qui permet d'affiner l'analyse de l'effet revenu.

IV23) Courbe de revenu consommation et courbe d'Engel

IV231) La courbe de revenu consommation (CRC) ou « pseudo courbe d'Engel »

Dans l'hypothèse choisie (U=*U*(x,y)) quelconque, R variable (R1>R0), prix fixes (*px* et *py* constants), la variation de R a pour conséquence l'apparition de plusieurs points de tangence ou optima. Si le revenu du consommateur était nul, il consommerait (x,y)=(0,0).

Il existe donc dans le plan (x0y) *une courbe, représentative d'une fonction* y=f(x), qui relie l'ensemble des optima issus des variations de la demande du consommateur *en fonction du revenu*.

On peut alors donner la définition nouvelle suivante : ***<u>On appelle courbe de revenu consommation (CRC)</u>*<u>, ou « sentier de croissance du revenu », ou « pseudo-courbe d'Engel »,</u> *<u>le lieu géométrique des optima correspondant à un « effet revenu »</u>***. Ci-dessus elle joint donc les points (0, Ω1,Ω2) La notion d' « effet revenu » est étudiée plus loin.

Il importe de souligner les facteurs déterminant la forme prise par la CRC. Car en effet, la carte d'indifférence du consommateur n'est pas empiriquement connaissable. Elle est, on l'a dit, un outil théorique. Aussi lorsqu'on étudie de manière *appliquée*, ou *empirique*, la demande d'un bien en fonction du revenu, est on amené à recourir à d'autres indicateurs. L'indicateur privilégié, qui fera l'objet d'une présentation spécifique dans la suite du cours, est celui d'*élasticité de la demande d'un bien par rapport au revenu*, ou tout simplement *l'élasticité revenu.* Parmi les résultats variés prix par cet indicateur, un cas ressort comme particulier, qui est celui de l'acquisition de biens dits « normaux » comme *le logement, l'habillement* etc…. Pour ces biens , l'élasticité revenu est constante et égale à 1. Ceci est la conséquence d'une carte d'indifférence particulière, et **telle que la courbe de revenu consommation est *une droite de pente=1.***

IV232) De la courbe de revenu consommation à la courbe d'Engel

1) La courbe de revenu consommation (rappel)

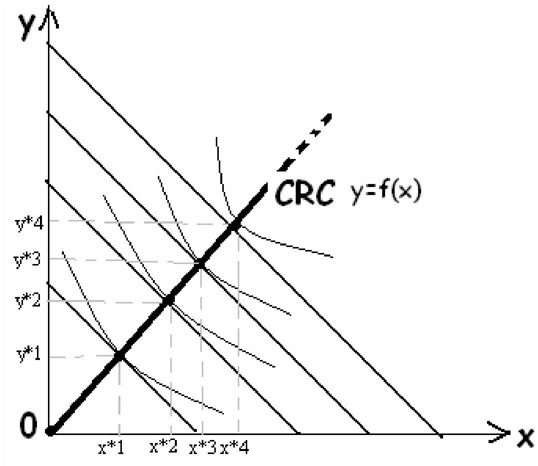
L'optimisation permet la construction de la « pseudo courbe d'Engel » ou Courbe de Revenu Consommation (CRC).

Cette courbe est *le lieu géométrique des points de coordonnée (x*, y*) vérifiant un EFFET DE REVENU* (lorsque R varie, le rapport des prix (px/py) restant constant).

La méthode de détermination de son équation est la vérification de l'égalité :

$TMS_{y/x}$ = px/py d'où l'on extrait la relation *y=f(x)*

La représentation graphique élémentaire de la CRC, dans le plan d'optimisation, est celle d'une courbe (ici une droite) passant par l'origine, de pente (p1/p2). Soit en supposant le revenu R croissant, la droite *y=f(x).*



2) Passage à la courbe d'Engel

a) La méthode algébrique

La CRC, d'équation *y=f(x)* comporte une relation fonctionnelle implicite entre la quantité optimale demandée de chacun des biens (x*,y*), et chaque niveau de revenu (voir le graphique ci-dessus).
On lit que : x*4 > x*3 > x*2 > x*1 car R4 > R3 > R2 > R1 (même constat pour y*)

Il est donc possible d'en extraire algébriquement la relation explicite entre la quantité optimale demandée de chacun des biens, et le revenu, soit

x* = *f(R)* appelée courbe d'Engel du bien X
***y** = f(R)* appelée courbe d'Engel du bien Y**

Sous l'hypothèse (px/py) constant et R variable (et épargne nulle):
La contrainte de budget s'écrit sous la forme de l'égalité du revenu et de la dépense,
soit : R = $xp_x + yp_y$ (équation 1)
L'équation de la courbe de revenu consommation a été déterminée (supra), de la forme *y*=f(x)* (équation 2).
Le système formé par ces deux équations est résolu en *x*, en éliminant *y* de la contrainte par remplacement par son expression en x, donnée par la CRC (équation 2). On obtient *x*=f(R).* A nouveau par remplacement de *x** dans la CRC on déduit *y**= *f*(R).

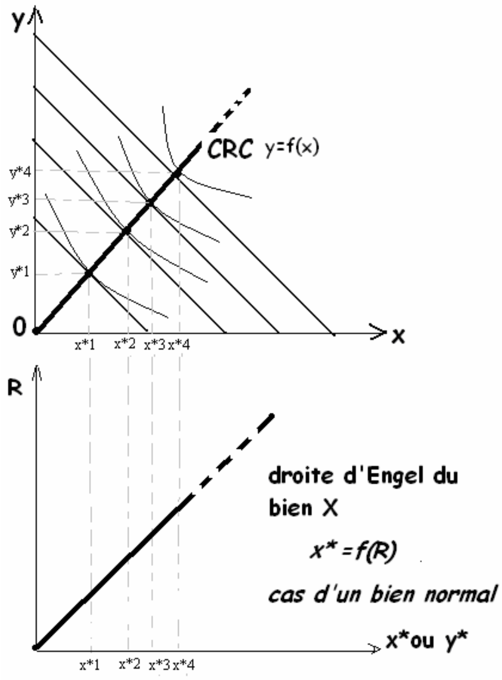
Exemple : Soit : px=1 py=2 R variable

(1) La contrainte de budget : R = $xp_x + yp_y$= x + 2y
(2) On suppose que l'optimisation a conduit à la CRC de la forme : *y =2(px/py)x*
Donc *y=2(1/2)x=x*

Par remplacement de (2) dans (1) : R = x + 2x = 3x ➔ x* = (1/3)R
D'où l'on déduit y* = (1/3) R
Les deux courbes d'Engel du bien X et du bien Y, qui donnent la ***relation entre la croissance du revenu et celle de la quantité optimale demandée de chacun des biens (X ou Y).***

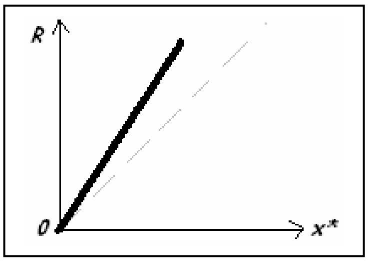
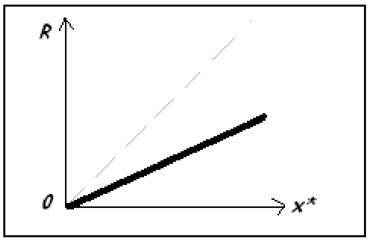
b) La « méthode » géométrique

Cette méthode est utile pour constater que le résultat algébrique comporte une translation des points optimaux du plan d'optimisation (y0x) vers le plan de chaque courbe d'Engel (R0x* ou R0y*).
Ce qui confirme la relation implicite énoncée plus haut entre le revenu R et les quantités optimales consommées (x*,y*), données par la CRC.
Appliquée à l'exemple ci-dessus la translation est la suivante (en représentant la réciproque
R = $f^{-1}(x^*)$.



3) L'intérêt de la courbe d'Engel

Elle permet de situer chacun des biens dans la *nomenclature des biens selon leur nature*, résumée ci-dessous sous forme de tableau :

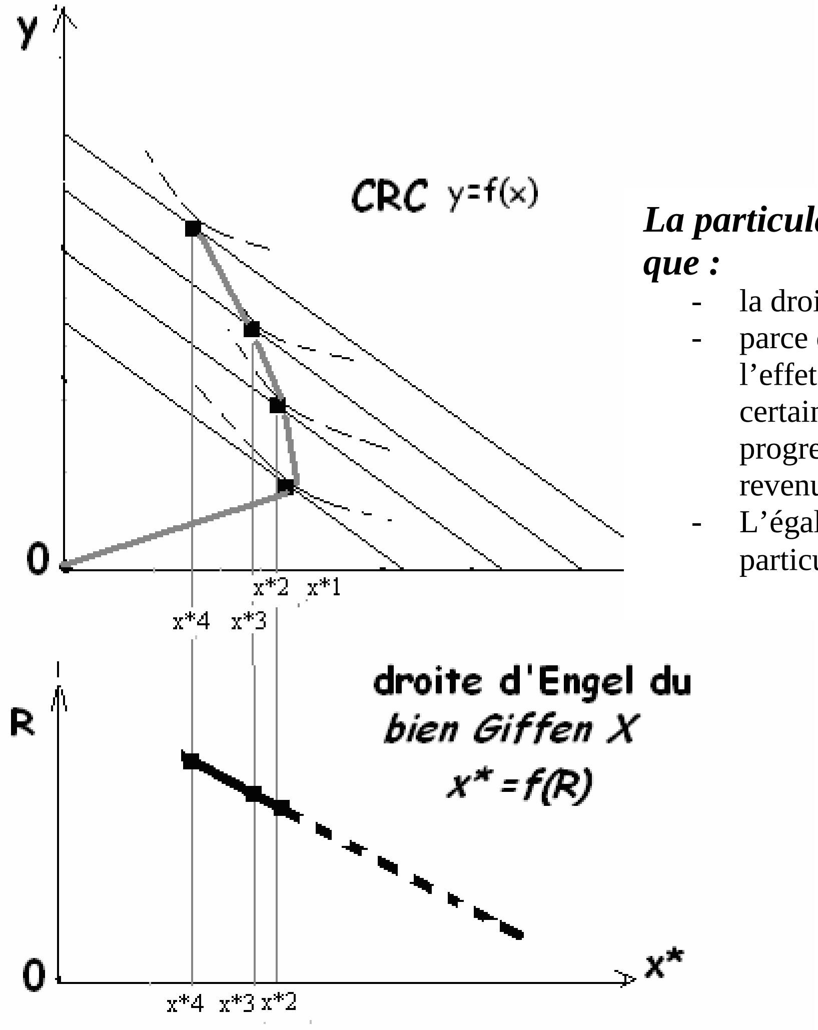
Nature du bien	Dérivée de x* = *f*(R)	Graph de la courbe (droite)
NORMAL	d(x*)/dR > 0 Hausse de la quantité consommée moins que proportionnelle à celle du revenu. Alors ($0<\varepsilon_{x^*/R}<1$)	Exemple : les biens nécessaires 
SUPERIEUR ou DE LUXE ou de VEBLEN	d(x*)/dR > 0 Hausse de la quantité consommée plus que proportionnelle à celle du revenu. Alors ($\varepsilon_{x^*/R}>1$)	Exemple : bijoux 
INFERIEUR	d(x*)/dR < 0 Baisse de la quantité consommée avec la hausse du revenu. Alors ($\varepsilon_{x^*/R}<0$)	Exemple : certains biens alimentaires Cas particulier – voir ci-dessous -

4) Cas particulier : la courbe d'Engel des « biens inférieurs ».

La considération des biens inférieurs est due à GIFFEN. Celui-ci a mis en évidence le paradoxe de la demande de certains biens alimentaires de mauvaise qualité, demande qui s'accroît lorsque le prix ($\varepsilon_{x*/px}$>0) et diminue lorsque le revenu s'accroît ($\varepsilon_{x*/R}$<0).
Ce paradoxe est appelé « *paradoxe de Giffen* ».

La caractéristique de la courbe d'Engel est alors :
x=f(R)* et *(dx*/dR) <0*
La courbe (ou droite) est décroissante.

La courbe d'Engel des biens inférieurs est le résultat d'une translation des quantités optimales données par les points vérifiant un effet de revenu, depuis le graphique de l'optimum, Mais la courbe de revenu consommation dont elle est issue possède une forme particulière qui la distingue du cas normal.



La particularité d'un bien Giffen est donc que :

- la droite d'Engel est décroissante,
- parce que l'effet de revenu l'emporte sur l'effet de substitution. On lit qu'à partir d'un certain seuil de revenu, le bien est progressivement délaissé à mesure que le revenu croît.
- L'égalité de Slutsky-Hicks traduit cette particularité (cf infra § IV32)).

IV24) Applications

L'EFFET REVENU : Application 1 . Analyse de la réponse à la question 2 de l'exemple en encadré U(x,y) = x.y et commentaire de la partie concernée du graphique (*cf. encadré* : Commentaire de conclusion relatifs au § IV23).

L'EFFET REVENU : Application 2
Un consommateur possède les préférences données par sa carte d'utilité :
$U = U(x,y) = (x_{1+4})(x_1+x_2)$, x_1 et $x_2 \geq 0$
Les prix des biens sont respectivement : $px_1 = 3$ et $px_2 = 2$
<u>Questions</u> :

1) Représenter graphiquement la courbe d'indifférence de niveau d'utilité *U=U* (cste)*
2) Après avoir écrit la contrainte de budget, déterminer les équations de demande (donc des quantités optimales): $x_1=f(R)$ et $x_2=f(R)$ connaissant px_1 et px_2. Le revenu R étant inconnu il est nécessaire d'envisager trois hypothèses relatives à sa répartition entre x_1 et x_2.
3) Dans un même graphique, représenter les courbes de « revenu-consommation » ou d'Engel pour les biens x_1 et x_2 *(dans le plan x_1 et x_2,0,R)*, dans le but de caractériser chacun d'eux (biens normal ou bien inférieur).

1) L'équation de la courbe d'indifférence est de la forme : $x_2 = f(U^*,x_1)$.
Soit $U(x,y) = (x_1+4)(x_1+x_2) \rightarrow (x_1+x_2) = U^*/ (x_1+4) \rightarrow \underline{x_2 = U^*/(x_1 + 4) - 1}$
La courbe représentative de cette fonction est décroissante : la dérivée première est négative, soit ($dx_2/dx_1 < 0$). La dérivée $dx_2/dx_1 = - U^*/(x_1 + 4)^2 - 1$. Elle est aussi convexe par rapport à l'origine : $d^2x_2/ dx_1^2 > 0$ et égale à : $- [- U^*/(x_1 + 4)^4 - 1$.
Ce qui se traduit par sa forme asymptotique. L'asymptote verticale est $x_2 = -4$, ce qui permet de limiter la courbe à $x_2= U^*/4$ pour $x_1=0$. L'asymptote horizontale (plutôt oblique) conduit à retenir $x_1 = -2+\sqrt{4+U}$ pour $x_2 = 0$. Puisque on ne considère évidemment que la partie positive du plan (x_2, x_1).

2) Soit à déterminer $x_1=f(R)$ et $x_2=f(R)$ connaissant $px_1 = 3$ et $px_2 = 2$.
Le revenu R étant inconnu (donc variable), on doit envisager les trois hypothèses de la théorie du comportement du consommateur :
Hyp1 : il affecte tout son revenu à la consommation du bien x_2
Hyp 2 : il affecte tout son revenu à la consommation du bien x_1
Hyp 3 : il réalise une dépense « optimale » en consommant un panier de biens (x_1^* et x_2^*)
Dans les trois cas, on raisonne à l'aide de :
La contrainte de budget : $R = xp_x + y\, p_y = 3x_1 + 2x_2$
L'équation de la courbe d'indifférence $\underline{x_2 = U^*/(x_1 + 4) - 1}$ (U* variable)

Hypothèse 1 (Graphique 1) : on démontre que l'optimum est « de coin », au point A, d'ordonnée $x_2 = R/4$.
La dépense totale du consommateur s'écrit en effet $R = R/px_1 + R/px_2 = R/px_2$ si $x_1 = 0$. Intuitivement l'optimum ne peut être que $A(x_1, x_2) = A(0, R/px_2)$.
Pour représenter cette contrainte il faut néanmoins représenter l'abscisse à l'origine, point B, donnée par : $R/px_1 = R/3$.
La démonstration proprement dite requiert le calcul du $TMS_{x2/x1}$ et <u>l'application</u> de l'égalité vérifiée à l'optimum : $TMS_{x2/x1} = px_1/px_2$. Le $TMS_{x2/x1}$ est le rapport des utilités marginales partant de $U = (x_{1+4})(x_1+x_2)$
Soit : $TMS_{x2/x1} = \dfrac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} = \dfrac{3}{2}$
Les dérivées partielles sont celle de $U = (x_{1+4})(x_1+x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 = \underline{2x_1 + x_2 + 4}$

$\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{2x_1 + x_2 + 4}{x_1 + 4}$. Compte tenu de l'hypothèse 1, au numérateur : $2x_1=0$ et $x_2 = R/2$, et au dénominateur $x_1 = 0$. Soit au total (R/2) + 4 / 4 = R/2.
Ce qui vérifie bien que l'optimum est « de coin », au point A, d'ordonnée $x_2 = R/4$.
Quel doit être le montant du revenu permettant au consommateur de faire cette dépense ?
On remarque que à l'optimum de coin l'égalité est une inégalité, soit $TMS_{x2/x1} < px_1/px_2$.
Les deux termes représentent chacun une pente :
Celle de la courbe d'indifférence $\underline{x_2 = U^*/(x_1 + 4) - 1}$ qui s'écrit indifféremment
$\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = dx_2/dx_1$
Et celle de la droite de budget : - (px_1/px_2).
Le graphique permet de constater que la première est inférieure à la seconde. On a donc

$$\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{2x_1 + x_2 + 4}{x_1 + 4} = \frac{\frac{R}{2} + 4}{4} < \frac{3}{2}$$ et donc R < 4.

Hypothèse 2 (Graphique 1) : Il suffit de considérer à nouveau l'égalité $\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{2x_1 + x_2 + 4}{x_1 + 4}$ pour lui appliquer l'hypothèse 2, suivant laquelle $R/px_2 = 0$ et donc $x_2 = 0$.
La dépense en $x_1 = R/px_1 = R/3$ qui définit l'optimum de « coin »

B (x_1, x_2) = B $(R/px_1, 0)$ = B (R/3, 0).

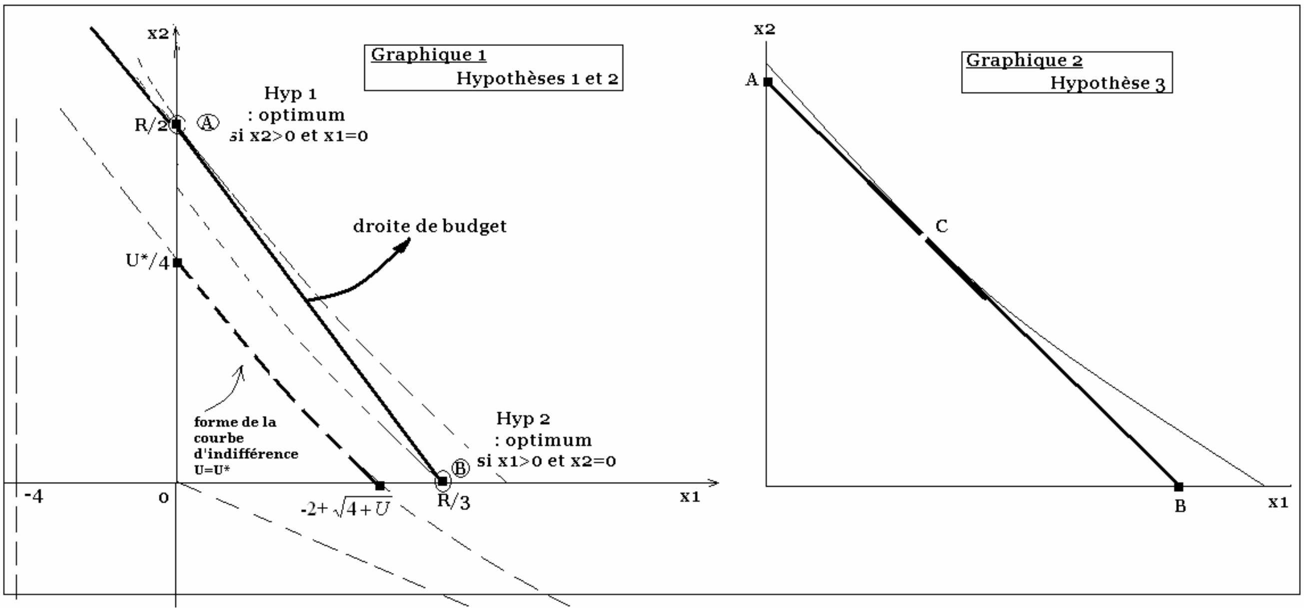
Et le montant du revenu nécessaire est :

$$\frac{\frac{2R}{3} + 4}{\frac{R}{3} + 4} > \frac{3}{2}$$ puisque cette fois les pentes sont dans cet ordre, et donc R > 12.

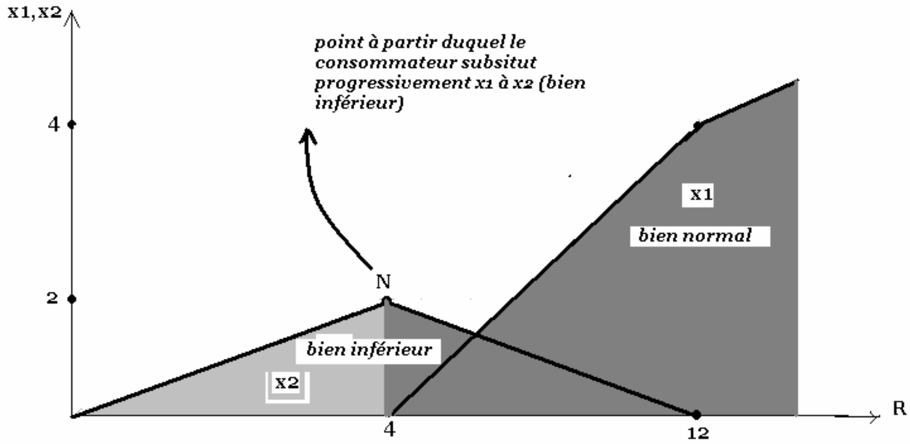
Hypothèse 3, celle du panier optimal (x_1^*, x_2^*) revient à la maximisation de l'utilité sous contrainte (R).
La méthode est la suivante :

- Du TMS on déduit $x_2 = f(x_1)$
- Par remplacement de x_1 par sa valeur dans la contrainte R, il est possible de déterminer les quantités optimales $x_1^* = f(R)$ et donc ensuite $x_2^* = f(R)$.

Le résultat est cette fois un *optimum normal*, noté C (x_1^*, x_2^*) = C ((R/2) – 2 ; 3 – (R/4)), qui vérifie la tangence entre la droite de budget et la courbe d'indifférence (Graphique 2).
La droite de budget a pour ordonnée A et pour abscisse B. En chacun de ces points on observe les relations opposées aux précédentes :
-en A que le $TMS_{x2/x1} \geq 3/2$, et par conséquent $R \geq 4$
-en B que le $TMS_{x2/x1} \leq 3/2$, et par conséquent $R \leq 12$



Les résultats issus de ces hypothèses permettent de représenter les *« courbes de revenu consommation »* (CRC) pour chacun des biens.



Le graphique représente les consommation optimales x_1* et x_2* dans l'ordre du revenu croissant de 0 à > 12 :

x1 = 0	**x2 = R/2**	**si R <4**
x1 = R/2 - 2	**x2 = 3 - R/4**	**si 4 ≤ R ≤ 12**
x1 = R/3	**x2 = 0**	**si R > 12**

Il ressort que le bien x_2 est un ***bien inférieur***. Sa consommation décroît à partir de N, alors que le revenu augmente (cet effet est appelé *« effet giffen »* et le bien un *« bien giffen »*). Pour R =12, le consommateur ne consomme plus de x_1.

Au point N, des quantités de l'autre bien sont progressivement substituées à x_2. Les quantités du bien x_1 croissent avec le revenu. Le bien x_1 est donc un ***bien normal***.

IV3) L'effet prix ou *effet de la variation du prix d'un bien sur la demande de ce bien*

IV31) De la fonction d'utilité à la fonction de demande

IV311) génération de la demande du bien X en fonction de *px* (ou qx=*f*(px)) à partir d'une fonction d'utilité exemplifiée =*U*(x,y) =xy : réponse à la question 3 de l'exemple en encadré U(x,y) = x.y suivi du commentaire du graphique (*cf. fin de l'encadré* : Réponse à la question 3 (relative au § IV3)

IV312) Généralisation : génération de la fonction de demande $q_x = f(p_x)$

Examinons la forme de la fonction de demande correspondant à une fonction d'utilité U = xy. On admet que cette fonction réunit les conditions de maximisation sous contrainte (extremum et maximum).

On peut alors définir $q_x = f(px)$, la fonction de demande de X, par la méthode suivante :

1°) Détermination des quantités consommées optimales « x » ou recherche de l'optimum. Soit donc le programme du consommateur :

Max U= xy

sc : R-x*px*-y*py = 0*

Le Lagrangiens s'écrit : $V(x,y,\lambda) = xy + \lambda\,(R\text{-}x\,px\text{-}y\,py)$

Le système des dérivées partielles annulées simultanément est

$\delta V/\delta x = y - \lambda px \quad = \quad 0 \qquad (1)$

$\delta V/\delta y = x - \lambda py \quad = \quad 0 \qquad (2)$

$\delta V/\delta \lambda = R\text{-}x\,px\text{-}y\,py = 0 \qquad (3)$

De (3) on tire (3)', soit **x = (R-y*py*)/*px*.** On obtient bien une équation de la quantité « x » demandée en fonction du prix *px*, mais elle est aussi fonction de y et *py*, puisque R, est le revenu constant.

2°) On doit donc rechercher une expression de la demande qui ne soit fonction que de R donné (ou constant) et *px*, variable, dans le but d'obtenir la fonction $q_{x\,=}\,f(px)$.

On utilise pour cela les équations (1) et (2) pour exprimer y et py en fonction de x et de *px*.

De (1) on tire (1)', soit $y = \lambda py$

De (2) on tire (2'), soit : $py = x/\lambda$

En remplaçant dans (3)', on obtient l'équation simplifiable :

x (ou q_x) = $[R - (\lambda px \times x/\lambda)]/px = (R/px) - x$, soit $2x = R/px \Leftrightarrow$ x (ou q_x) = R/2*px* c'est-à-dire la demande de X en fonction de son prix *px*, R le revenu étant constant ou donné.

On remarque, ainsi que nous l'avons déjà mentionné que la fonction de demande est de forme hyperbolique (y = k/x, voir supra), et que sa représentation est celle classique d'une courbe convexe par rapport à l'origine.

Nous concluons par le constat suivant lequel la fonction d'utilité U= xy permet facilement de déterminer l'équation de la demande d'un bien par rapport à son prix. Aussi est-elle fréquemment utilisée, tout en demeurant un cas particulier.

Nous continuerons à la prendre en exemple pour introduire *la courbe d'effet prix* et donc l' « **effet prix** », objet de ce paragraphe.

IV313) Applications de la méthode à d'autres fonctions d'utilité

a) La fonction $\mathbf{U=}U\,(x_1, x_2) = x_1\,(x_2\text{-}1)\,;\ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 > 1$

Enoncé de l'exercice

Soit la fonction d'utilité du consommateur : $\mathbf{U=}U\,(x_1, x_2) = x_1\,(x_2\text{-}1)\,;\ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 > 1$, les quantités achetées. Les prix des deux biens X_1 et X_2 sont respectivement p_1 et p_2. Le revenu du consommateur est R, et supposé supérieur à p_2.

Question : déterminer les fonctions de demande des biens X_1 et X_2, *soit :*

$x_1 = f\,(p_1, p_2, R)$ et $x_2 = f\,(p_1, p_2, R)$

Correction :

1) Recherche des quantités optimales x_1 *et* x_2. Il s'agit donc de maximiser U sous contrainte de revenu, en appliquant soit la méthode du remplacement, soit celle du multiplicateur de Lagrange.
Soit le programme du consommateur :

Max $U=U(x_1,x_2) = x_1\,(x_2-1)$ et $x_1 \geq 0$ et $x_2 > 1$

Sc : $R-x_1p_1-x_2p_2 = 0$ $(R>p_2)$

Le Lagrangien s'écrit : $L = x_1\,(x_2 - 1) + \lambda(R-x_1p_1-x_2p_2)$

La matrice des dérivées partielles premières est alors :

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = (x_2 - 1) - \lambda p_1$

2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2$

3) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = R - x_1 p_1 - x_2 p_2$

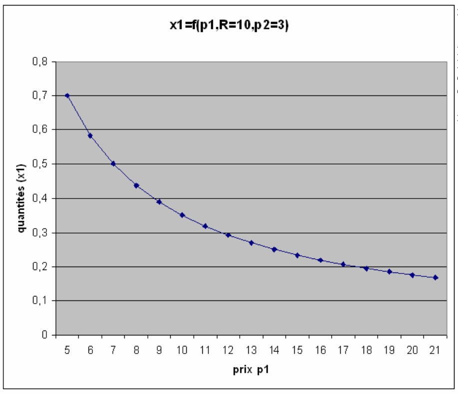
1) permet d'écrire : $\lambda = (x_2 - 1)/P_1$ et 2) donne $\lambda = x_1/p_2$. En égalisant 1) et 2) :
$x_2p_2 - p_2 = x_1p_1 \Rightarrow x_2p_2 = x_1p_1 + p_2$

2) Remplacement dans la contrainte $R= x_1p_1 + x_2p_2$
$x_2p_2 = x_1p_1 + p_2$ en remplaçant $R= x_1p_1 + (x_1p_1 + p_2) = 2\,x_1p_1 + p_2$
d'où $R = 2\,x_1p_1 + p_2$ et donc $\underline{x_1 = f\,(p_1, p_2, R) = (R - p_2) / 2p_1}$

3) Par déduction on détermine $x_2 = f\,(p_1, p_2, R)$
On sait qu'à l'optimum (voir 1 ci-dessus) : $x_2p_2 = x_1p_1 + p_2$ et $R= x_1p_1 + x_2p_2$
Pour déterminer x_2 l'égalité à l'optimum doit s'écrire $x_1p_1 = x_2p_2 - p_2$.
En remplaçant (x_1p_1) dans R ($R= x_1p_1 + x2p_2$), la contrainte devient :

$R = x_2p_2 - p_2 + x_2p_2 = 2\,x_2p_2 - p_2$ et donc

$x_2 = f\,(p_1, p_2, R) = (R + p_2) / 2p_2$



représentation graphique de la fonction de demande : exemple du bien X1

Par exemple pour un revenu R = 10 et un prix p2 = 3
Les quantités demandées du bien X1, pour les prix p1 donnés ci-dessous, prendra les valeurs d'ordonnées déterminées par la fonction

$x1 = \dfrac{R - p2}{2p1}$

P1
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21

(un même exemple peut être appliqué au bien X2)

b) Autre fonctions d'utilités

En appliquant la méthode du paragraphe précédent aux fonctions d'utilité données ci-dessous, on détermine les *fonctions de demande des biens xi*, telles que : $x_i = f\,(R,p_i)$.

Fonction 1 : $U_1\,(x_1,x_2) = \text{Log}\,x_1 + 2\text{Log}\,x_2$

Fonction 2 : $U_2\,(x_1,x_2) = x_1.x_2^2$

Fonction 3 : $U_3\,(x_1,x_2,x_3) = \text{Log}\,x_1 + 3\log x_2 + 2\text{Log}\,x_3$

Fonction 4 : $U_4\,(x_1,x_2) = x_1^{1/2}\,.\,x_2^{1/2}$

Fonctions de demande : RESULTATS (application § IV313)				
FONCTIONS	U1	U2	U3	U4
x1 =	R/3p1	R/3p1	R/6p1	(p2/p1) (R/p1+p2)
x2 =	2R/3p2	2R/3p2	R/2p2	(p1/p2) (R/p1+p2)
x3 =			R/3p3	

IV32) Analyse de l'effet prix (EP) : La formule de Slutzky-Hicks ou *la décomposition de l'effet prix dans le cas de deux biens*

IV321) l'effet prix ou la somme de l'effet revenu et de l'effet de substitution
C'est l'analyse de l'effet prix qui nous conduit à la formulation, déjà vue plus haut, de la *loi de la demande*, suivant laquelle les quantités demandées varient en raison inverse du prix. Ou si l'on préfère
si $q_x = f(px)$ alors $dq_x/dx < 0$, savoir : si px croît alors q_x décroît, et inversement.
Dès la fin du XIX^ème^ siècle, les théoriciens néo-classiques ont constaté par des tests empiriques que ce résultat n'est pas toujours vrai. Leur explication réside dans la définition de l'*effet prix*. Cet effet doit être considéré comme le résultat de deux ***sous effets*** appelés **Effet de substitution (ES) et effet de revenu (ER).**

D'où l'égalité EP = ES ± ER.

On démontre que c'est la composante (ER) qui est la cause des anomalies constatées dans l'effet prix global (ou EP).

C'est au début du XX^ème^ siècle que Slutzky propose dans son article ("Sulla teoria del bilancio del consummatore", 1915, *Giornale degli Economisti*.) une formule algébrique où l'effet prix est décomposé en ES et ER. Cette formule s'écrit pour deux biens X et Y (mais est généralisable à *n* biens) :

$$\frac{\partial x}{\partial px} = \left(\frac{\partial x}{\partial px}\right)_{U=constante} \pm \mathbf{x}\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)_{\mathbf{Prix=constante}}$$

EP = ES ± (ER)

Comme on peut le lire, la formule « interroge » la forme de la courbe d'effet prix (ou de demande de x) puisque le signe de l'effet prix global (**δx/δ*px***) est à priori indéterminé.
On sait qu'en règle générale [$(\delta x/\delta px)_{U=cste}$] **<0**.

Mais il existe deux cas, respectivement celui **des *biens inférieurs*, et celui des *biens supérieurs*,** qui peuvent déroger à cette règle (voir application du § IV24 ci-dessus).

- **si X est un bien *inférieur* ou de *« Giffen »*, le signe de l'EP dépend de l'importance du bien X dans le budget du consommateur (donc de son coefficient budgétaire). Dans ce cas, on observe que :**
  $\delta x/\delta R < 0$ et $-x(\delta x/\delta R)_{prix=constante} > 0 \Leftrightarrow EP > 0$

- **si X est un bien *supérieur*, alors :**
  $\delta x/\delta R > 0$ et $-x(\delta x/\delta R)_{prix=constante} < 0 \Leftrightarrow EP < 0$

Il existe différentes manières de présenter la *décomposition de l'effet prix* en *effet de substitution* et *effet de revenu*.

- IV322) Une manière synthétique et littérale, achevée par un graphique type faisant apparaître *la courbe de prix consommation (CPC)*, à la manière de JC Delaunay et J. Gadrey (IV322 et IV323)
- IV323) Une manière « appliquée » mettant en évidence les deux hypothèses conduisant à l'effet prix : celle de Slutzky et celle de Hicks (IV324).
- IV324) Enfin (mais cela n'épuise pas les présentations possibles) une manière « réflexive » par la résolution d'énoncés d'exercices.

IV322) l'effet substitution (ES)

Remarque : A l'origine de la relation de Slutzky on trouve le système d'équations résultant de la carte d'indifférence $U=U(x,y)$ et de la contrainte de budget $R = xp_x + yp_y$. Ce système s'écrit :

$U'_x - \lambda p_{x = 0}$

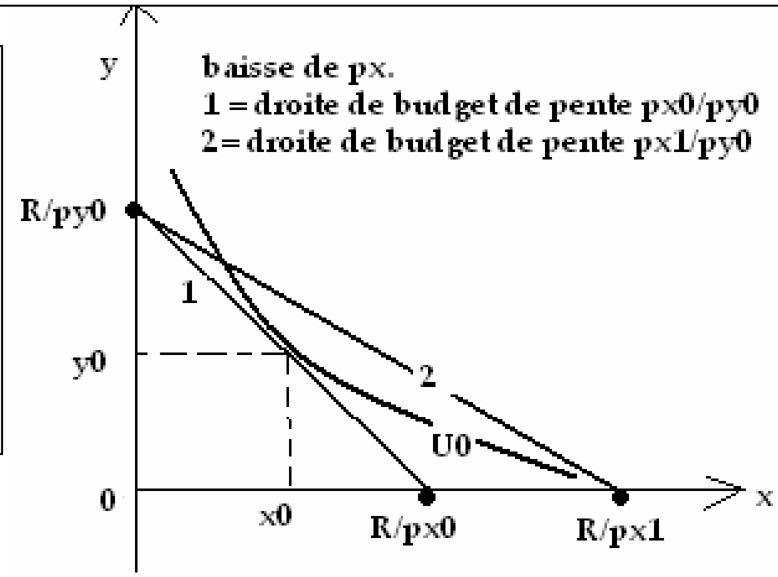
$U'_y - \lambda p_y = 0$

$R = xp_x + yp_y$

Sa résolution conduit par différenciation, au calcul de la dérivée partielle première $\frac{\partial x}{\partial px}$, telle que

$$\frac{\partial x}{\partial px} = \left(\frac{\partial x}{\partial px}\right)_{U=constante} \pm \mathbf{x}\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)_{\mathbf{Prix=constante}}$$

Effet normal d'une modification de la pente de la droite de budget (px_1/py_0) < ($px0/py_0$) : la variation de l'utilité



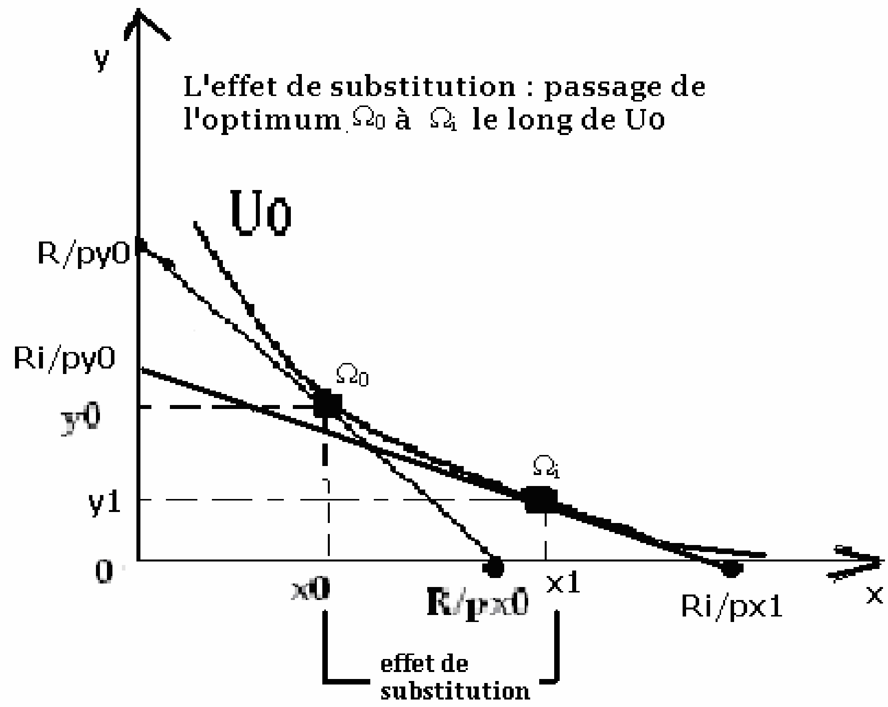
Mais pour les besoins de l'analyse de l'*effet de substitution*, nous devons imaginer que *dans un premier temps*, le consommateur *réalloue* son budget à prix (px_1,py_0) **<u>en conservant le même niveau de satisfaction</u>** (U_0 dans la figure). Dans ce cas, un *« optimum imaginaire »* serait atteint au point de tangence de la nouvelle droite de budget de pente (px_1/py_0) et de la courbe d'indifférence $U = U_0$. il s'agit donc de raisonner ***« à satisfaction constante »,*** (hypothèse de Hicks), de sorte que le consommateur achèterait les mêmes quantités qu'avant (x_0,y_0), dans la mesure où la baisse du prix de X le doterait d'un revenu imaginaire *plus petit que le revenu réel.* C'est cette hypothèse d'un *optimum* et d'un *revenu imaginaires*, qui permet d'isoler l'*effet de substitution*. Car il importe de noter que le revenu *réel* (R_0), quant à lui, ne change pas, puisque par définition *l'effet prix global* est réalisé *à revenu constant, mais à px* variable.

Appelons R_i le revenu imaginaire, et R le revenu réel. On vient d'exprimer l'inégalité $R_i < R$, quand *px* diminue. L'équation de la contrainte imaginaire peut donc s'écrire :

$\mathbf{R_i = R - (px_0 - px_1)\, x_0}$. Son écriture montre que l'hypothèse peut être interprétée en disant que tout se passe comme si on prélevait ***un impôt*** sur le consommateur ($R^i < R$) et qu'on lui versait ensuite une ***subvention*** ($R > R_i$). Pour l'analyse et la représentation on réécrit cette contrainte sous la forme :

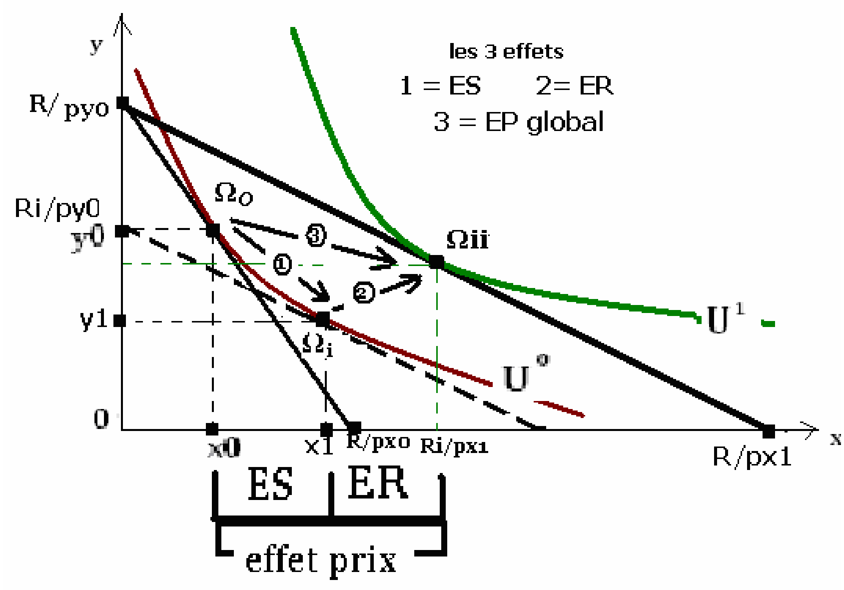
$\mathbf{y = (R^i - x_0\, px0) / py_0 = [R - (px_0 - px_1)\, x_{1} - x_0\, px_1] / py_0}$.

La pente de cette droite de budget est : dy/dx = - px_{1}/py_{0}. Les points de rencontre avec les axes sont :
-en ordonnée x=0 et y = R/py_0 – ((px_0 – px_1)x_1 /py_0
- en abscisse y = 0 et x= R/px_1 – (px_0 – px_1) x_1/px_1
En supposant *la fonction d'utilité connue, il est alors possible de* ***représenter l' « optimum imaginaire » (appelé Ω_i)*** représentatif de l'*effet de substitution*. Soit :



On lit que lorsque varie le revenu (R_0 à R_i) ainsi que le prix de x (px_0 à px_1), on observe un effet de substitution [(x1,y1) ≥ (x0,y0)] dont le lieu géométrique est la courbe d'indifférence initiale.
Dans la figure, cet effet est tel que (dx/d*px)* <0. On observe en effet que lorsque *px* diminue, alors x1>x0, *les quantités demandées croissent.*

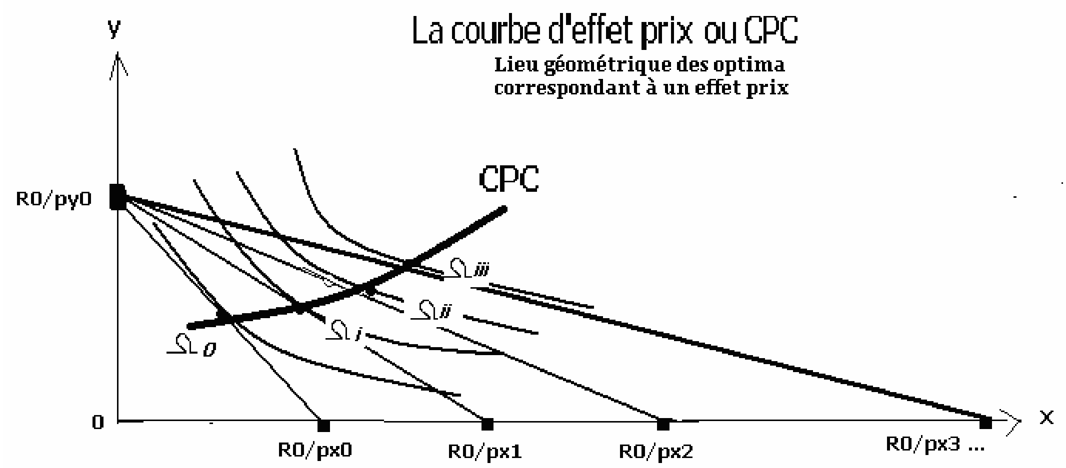
IV323) L'effet revenu (ER), l'effet prix global et *la courbe d'effet prix*
Pour compléter la décomposition de l'effet prix global, on s'intéresse, après l'effet de substitution (ES) à l'effet revenu (ER). Ces deux derniers sont imaginaires, et ont été présenté pour le premier comme un impôt, d'où l'on tire que le second est donc une subvention. **Seul l'effet prix global est donc un effet réel.**
Nous avons dit que le revenu réel R=R_0 ne change pas en réalité. C'est ce phénomène qu'il s'agit maintenant de traduire, en observant le type de déplacement de l'optimum qu'il implique. Il s'agit d'un « second déplacement » de l'optimum, après Ω_i, que l'on note Ω_{ii}. Cette fois il se situe sur une autre courbe d'indifférence, de niveau supérieur à U^0. La présentation ci-dessous, qui complète la précédente, n'est en fait qu'une introduction à *la formule algébrique de slutzky*.



La nouvelle droite de budget, tangente en Ω_{ii} sur U1 ***résulte d'un déplacement parallèle vers le haut, de la droite de budget imaginaire*****(R_i/py0, R_i/px_1).** La diminution de *px* détermine une abscisse **(R/*px_1* > R_i/*px1*),** traduction de la supposée ***subvention perçue par le consommateur***. Ce déplacement parallèle conduit au nouvel optimum $\Omega_{ii} > \Omega_i$ (flèche numérotée « 2 » du graphique)..
L'effet prix global est alors observable par le passage, numéroté « 3 » de Ω_0 à Ω_{ii}. 3 se décompose donc en (1 + 2), c'est-à-dire en deux passages :

- **de Ω_0 à Ω_i = ES**
- **de Ω_i à Ω_{ii} = ER**
- **d'où : Ω_0 à Ω_{ii} = ES + ER = EP**

En supposant plusieurs baisses successives de *px*, et donc plusieurs optima de type Ω_{ii} résultat d'un effet prix, il est alors possible de faire passer une *courbe* par l'ensemble de ces points.
On obtient ainsi ***la courbe de prix consommation* ou *courbe d'effet prix*,** ici celle du bien X puisqu'elle résulte de la baisse de *px.* Représentons tout d'abord cette courbe.



Une méthode existe permettant d'en déterminer l'équation. **On l'applique à l'exemple de la fonction d'utilité : U = xy (voir l'encadré plus haut la partie : Réponse à la question 3 (relative au § IV3).**
Une initiation plus abstraite à la recherche de cette équation est aussi proposée en (IV325 – b ci-dessous).
Ce qui importe est de constater par le graphique ci-dessus que **l'équation de la CPC est de la forme**

$x = f(px)$. La courbe décrit en effet les variations des quantités optimales consommées du bien X, lorsque son prix (*px*) diminue. **Il vient donc naturellement que la courbe d'effet prix permet aisément de déterminer *la fonction de demande du bien X, quelque soit px≥0.*** L'équation de cette courbe est rappelons le : $q_x = f(px)$. Toutefois, la CPC voit son graphe représenté dans le plan (x0y), tandis que la courbe de demande a le sien dans le plan $(x,0,p_x)$. On verra qu'une translation suffit pour passer d'un graphe à l'autre.
Ces deux expressions de la demande diffèrent donc. Pour les distinguer, on appelle la première ***« courbe de demande compensée »*** **et la seconde, *« courbe de demande parétienne ».***

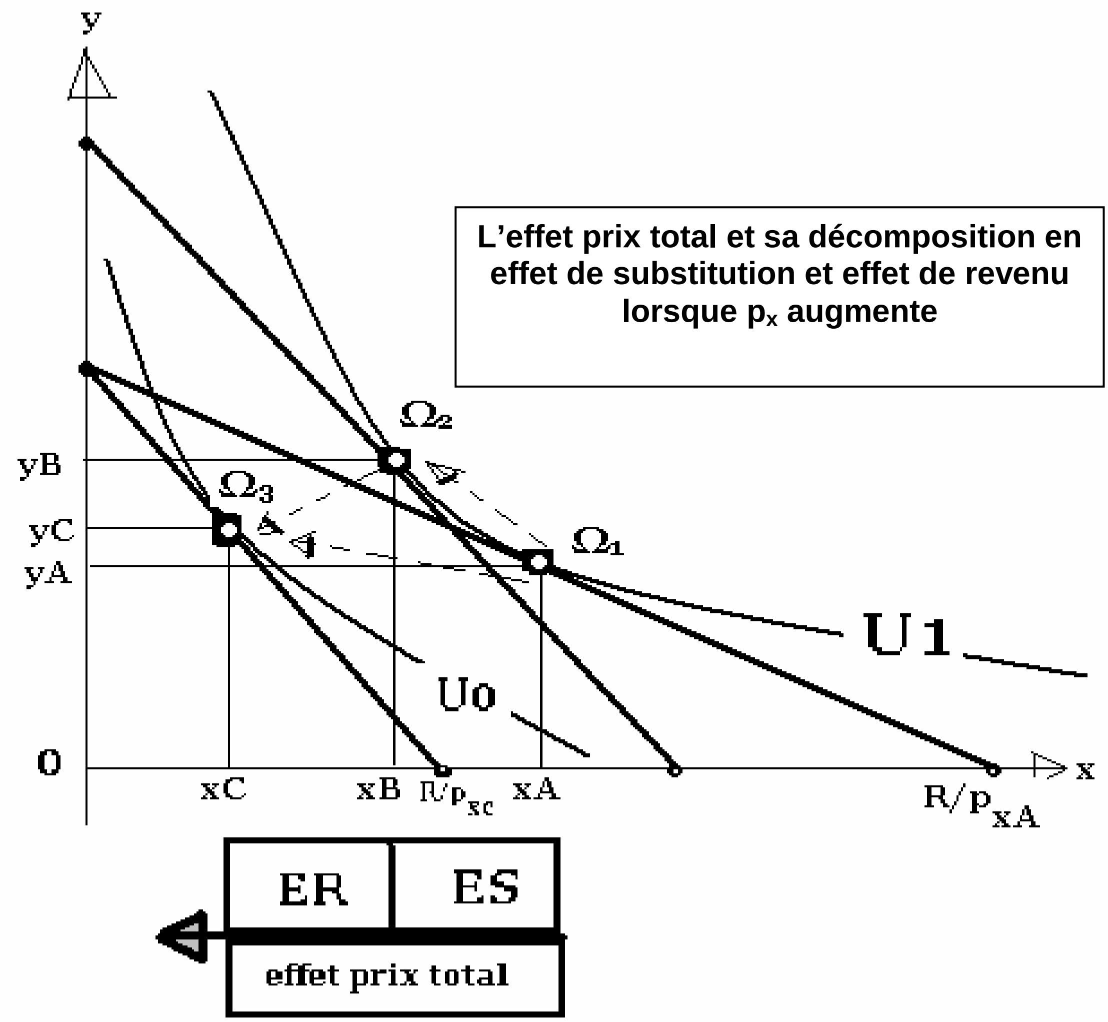
La **demande compensée** désigne la demande d'un consommateur en concurrence parfaite lorsqu'il dispose d'un revenu suffisant pour *« compenser une hausse de prix »* de façon à pouvoir maintenir sa satisfaction maximale au même niveau qu'avant la hausse de prix.
La demande compensée qui est un panier de biens, requiert donc un *revenu compensé* ou *minimal*.
La demande **parétienne (ou marshallienne)** est, *la demande dite normale,* celle qui exprime *la loi de la demande en fonction du prix*. Elle est généralement représentée par une branche d'hyperbole dans le plan $(0,q_x,p_x)$.

L'effet prix vient d'être présenté sous l'hypothèse d'une baisse de p_x. Il paraît aller de soi que des variantes de cette hypothèse sont possibles, selon le sens de variation de p_x ou de p_y, à revenu constant. Une hypothèse alternative (ci-dessous) est celle d'une *hausse de p_x*.

En règle générale, toute modification de l'optimum entraîne *une modification de la demande des deux biens* X et Y. On vient de voir que lorsque *px* varie (on a examiné le cas d'une baisse), R et p_y étant constants, il se produit une *effet total ou global du prix du bien* sur les quantités demandées de X et de Y. Cet effet se décompose en ES et en ER.

Le cas d'une hausse du prix p_x (R et p_y étant constants), permet aussi de vérifier cette décomposition.

Partant d'un optimum Ω_1, pour un prix noté p_{xA}, et de coordonnées (x_A,y_A), le long d'une courbe d'indifférence U_1, la hausse du prix de p_{xA} à p_{xc}, provoque l'effet prix global représenté ci-dessous.



La lecture du graphique consiste à commenter les trois effets sur les quantités des deux biens X et Y, soit

L'effet prix global (de p_x) : de Ω_1 (x_A,y_A) à Ω_3 (x_C,y_C)

La variation des quantités est : $x_C < x_A$ et $y_C > y_A$. La hausse du prix du bien X a pour la conséquence la baisse des quantités consommées de X, et la hausse de celles du bien Y.

Ceci est le résultat de deux sous-effets.

L'effet de substitution (sur U_1). On suppose (voir paragraphe suivant : Hicks) que la hausse du prix p_x est compensée par une hausse fictive $(R + \Delta R)$, du revenu nominal R, de sorte que le consommateur conserve le même pouvoir d'achat, ou le même revenu réel (rapport entre R/p_x).

Ce qui a pour effet de déplacer l'optimum de Ω_1 (x_A,y_A) à Ω_2 (x_B,y_B).

La variation des quantités est : $x_B < x_A$ et $y_B > y_A$. La substitution du bien Y au bien X est très forte.

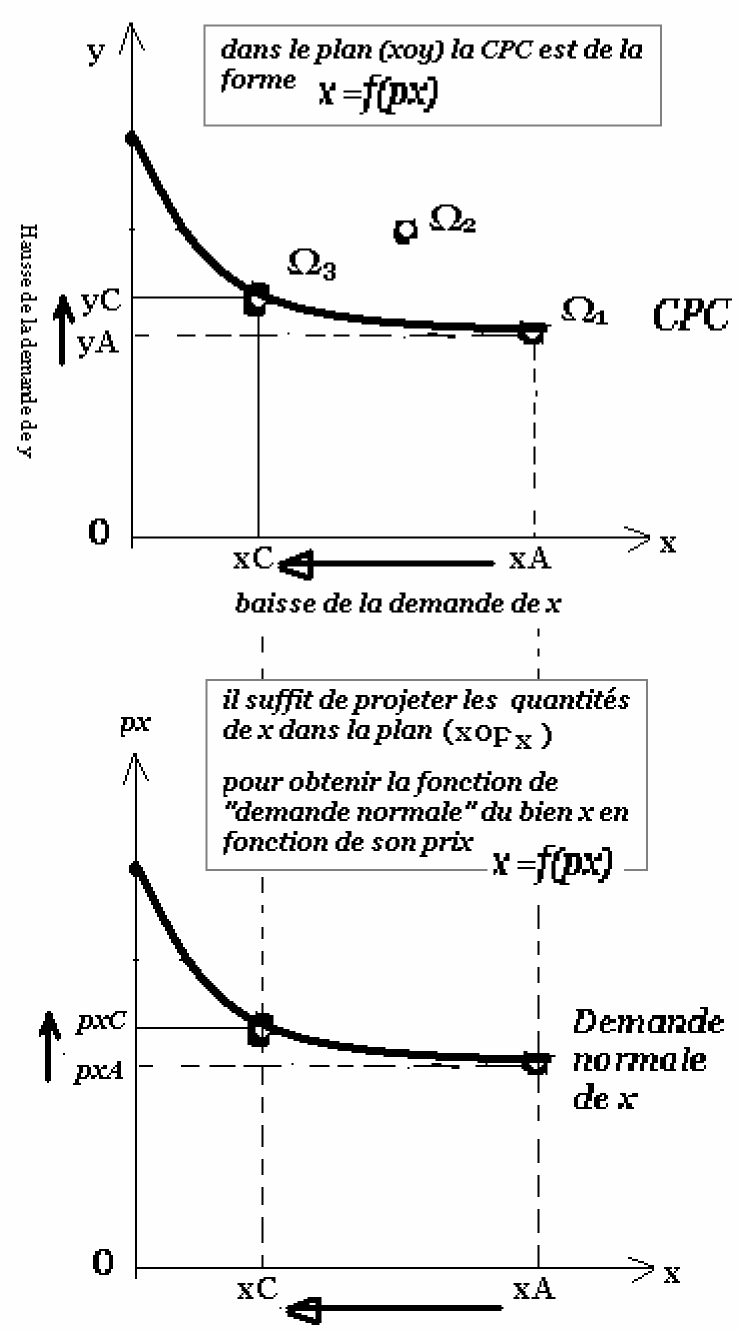
L'effet de revenu (de U_1 à U_0). La hausse du prix p_x a en fait pour conséquence la baisse du revenu réel. On traduit ceci par une baisse fictive$(R - \Delta R)$, du revenu nominal R, de sorte que la droite de budget se déplace parallèlement vers le bas.

Ce qui a pour effet de déplacer l'optimum de Ω_2 (x_B,y_B) à Ω_3 (x_C,y_C)

La variation des quantités est : $x_C < x_B$ et $y_C < y_B$. La substitution du bien Y au bien X est atténuée.

Il est alors possible dans le plan (x0y) de représenter le lieu géométrique des optima vérifiant l'effet prix, c'est-à-dire Ω_1 et Ω_3. Cette courbe est la courbe de prix consommation (CPC).

Comme elle traduit la variation des quantités demandées du bien X lorsque son prix varie, on peut en déduire la courbe de *demande normale* $x = f(p_x)$. Le graphique ci-dessous représente ces deux courbes, dont le graph ne diffère que par l'ordonnée..



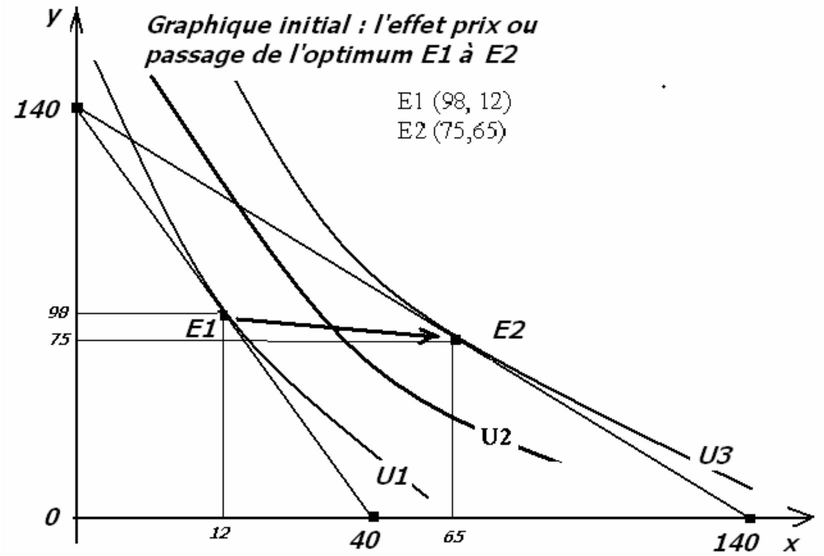
IV324) Décomposition de *l'effet prix* : l'hypothèse de Slutzky et l'hypothèse de Hicks (Application)

Soit un consommateur dont la carte d'indifférence U = *u* (x,y) permet de représenter trois courbes d'indifférence (graph ci-dessous).
La contrainte de budget de ce consommateur définie par la relation R = xpx + ypy, prend des valeurs différentes suivant les deux situations ci-dessous :
1er temps : R = 280, px = 7, et py = 2
2nd temps : R = 280, px = 2, et py = 2
Le prix du bien X, est donc passé de px=7 à px =2. Ce prix a diminué, toutes choses égales par ailleurs (R=280, py=2). Ce sont les conséquences de cette diminution (favorable au consommateur) qu'il s'agit d'étudier, en analysant *l' « effet prix »*, c'est-à-dire les modifications du choix du consommateur et la hausse de sa satisfaction puisque px a diminué.

On constate dans un premier temps la modification de la pente de la contrainte de budget :
1er temps : R = 280 = 7x + 2y ⇔ y = – x(7/2) + 280/2 = - (7/2) x + 140
2nd temps :R = 280 = 2x + 2y ⇔ y = – x(2/2) + 280/2 = - x + 140

Le changement de situation peut être représenté graphiquement en supposant données les trois courbes d'indifférence.

Graph 1



La première contrainte a pour ordonnée à l'origine dans le plan (x0y) : y = 140. En calculant la réciproque on a : x = -(2/7) y – (140/(-7/2) = -(2/7) y + 280/7 = -(2/7) y + 40. L'abscisse à l'origine est donc égale à 40
La seconde contrainte a pour ordonnée à l'origine dans le plan (x0y) : y = 140. Le calcul de la réciproque donne l'abscisse x = 140 puisque x = - y + 140.
On constate qu'elle a donc subi une *rotation* autour du point d'ordonnée à l'origine (R/py, 0) = (280/2 , 0) = (140,0). L'optimum, ou point de tangence avec une courbe d'indifférence se situera sur deux courbes d'indifférence de niveau différent. La seconde contrainte (avec px diminué) devrait conduire à une satisfaction plus élevée.
On admet que les coordonnées des deux équilibres sont ceux indiqués dans le graphique :
Premier temps : E1 (y , x) = E1 (98, 12)
Second temps : E2 (y , x) = E2 (75,65)
C'est le passage de E1 à E2 qui est appelé *« effet prix »*. Ce qui signifie que le consommateur a modifié, suite à la baisse du prix du bien X, son panier de biens : Il a diminué de 23 les quantités de Y, pour accroître de 53, celle de X.
C'est cet effet prix que HICKS et SLUTZKY ont mis en évidence et proposé d'étudier en le décomposant en deux *sous effets*, appelés : **Effet de substitution et effet de revenu.**
L'effet prix est la somme de l'effet de substitution et de l'effet de revenu.
Leur méthode diffère, entraînant une représentation graphique différente. Hicks raisonne à *satisfaction constante* (graph 2), tandis que Slutzky raisonne *pouvoir d'achat constant*
(graph 3).

Le raisonnement de Hicks à satisfaction constante

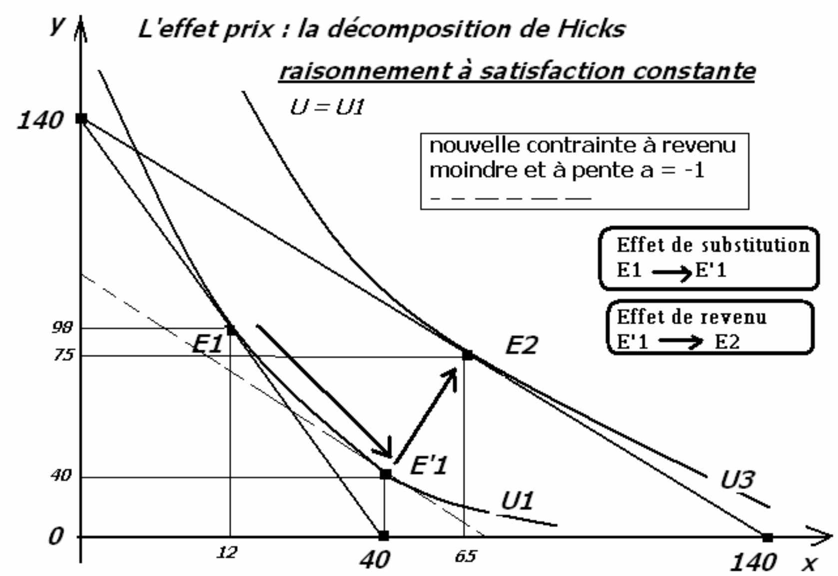
Calcul de *l'effet de substitution*
L'hypothèse est : il existe une nouvelle droite de budget de pente (a= -1) à revenu R moindre. Celle-ci est donc parallèle et inférieure à celle du second temps.
L'optimum se situe alors au point de tangence de cette nouvelle contrainte avec la courbe U1, parce que Hicks suppose que le consommateur cherche à maintenir sa satisfaction constante. On appelle E'1 ce nouvel optimum, et on admet qu'il pour coordonnées E'1 (40, 40).

Le déplacement de E1 à E'1, le long de U1 est appelé *effet de substitution*. Le consommateur opère en effet la réallocation suivante :
De E1 (98,12) à E'1 (40,40), le consommateur choisit de diminuer y de 58 et d'augmenter x de 28. L'effet de substitution se traduit par une variation des quantités achetées des deux biens.

Calcul de *l'effet de revenu*
En E'1 le revenu dépensé est : R = (40×2) + (40×2) = 80 + 80 = 160 < 240
La différence (280 – 160 = 120) peut permettre au consommateur d'améliorer sa satisfaction.
Il peut en effet atteindre la combinaison E2 (y,x) = E2 (75,65), ceci en augmentant y de 35 et en augmentant x de 25. En effet : 35py + 25x = (35×2) + (25×2) = 120, tout le supplément de revenu est alors alloué. Le déplacement de E'1 à E2, et donc de U1 à U3 est appelé *effet de revenu*.

Au total on observe bien que le passage de E1 à E2 (effet prix) est l'addition du passage de E1 à E'1 (effet de substitution) suivi du passage de E'1 à E2 (effet de revenu).

Graph 2



<u>Le raisonnement de Slutzky à pouvoir d'achat constant (quantités initiales au nouveau prix)</u>

Calcul de l'*effet de substitution*

L'effet de substitution est réalisé dans le graph ci-dessous par le passage de E1 à E''1, respectivement situés sur U1 et U2. La cause est que le consommateur cherche à conserver son *revenu constant*, tout en substituant X à Y.
Pour obtenir cet effet on détermine *la dépense* en calculant *les quantités initiales au nouveau prix*. Soit E1(98,12) ➔ R = (98×2) + (12×2) = 196 + 24 = 220.
Si son pouvoir d'achat était resté constant il ne dépenserait pas plus de 220, au nouveau prix. Sa contrainte s'écrirait : *y* = - x (px/py) + (R/py) = - x(1) + (220/2) = 110 – x.
On peut alors remplacer y par cette valeur dans la contrainte

R = xpx + ypy = ⇔ 220 = 2x +2(110-x)

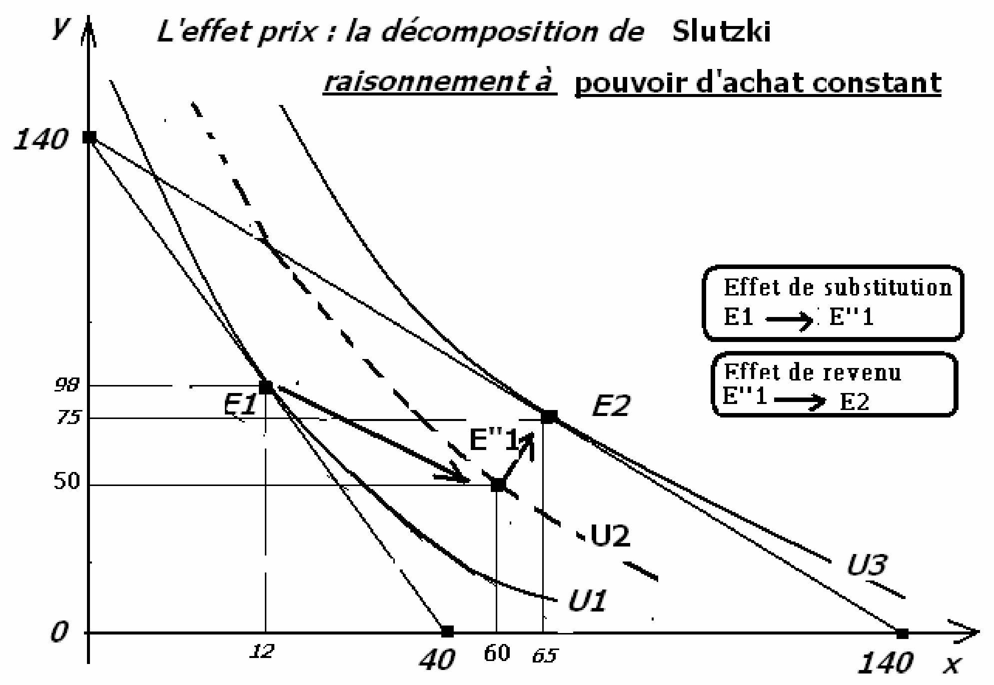
D'où l'on déduit x = 50 et par conséquent y = 60. On vérifie que 220 = (60×2) + (50×2).
Et donc le nouvel optimum E''2 et les nouvelles quantités optimales sur U2 est : E''(60,50).
L'effet de substitution est mesuré par : x = 38 et y = -38, comparativement avec E1.

Calcul de *l'effet revenu*

On constate qu'il n'utilise en E''1 que R = 220. Il peut donc accroître sa satisfaction en dépensant la différence (280-220 = 60). On suppose qu'il passe alors à l'optimum E2 (75,65), dépensant R = (75×2)+ (65×2) = 150 + 130 = 280. Sa satisfaction s'est accrue puisque
U3 > U2.

Au total on observe bien que le passage de E1 à E2 (effet prix) est l'addition du passage de E1 à E''1 (effet de substitution) suivi du passage de E''1 à E2 (effet de revenu).

Graph 3



IV325) Deux exercices avec initiation à la recherche de l'*équation des courbes de revenu consommation, de prix consommation, de demande parétienne et de demande compensée* (voir b)

a) Suite de l'étude de la fonction du § IV313 : **U=U (x_1 ,x_2) = x_1 (x_2-1) ; $x_1 \geq 0$ et $x_2 > 1$**

<u>Question 2 :</u> On considère les deux situations successivement : *t1* : p_1=p_2=1 et R = 3 ; puis *t2 : p_1= et R sont constants,* et p_2=2. Quelles quantités de biens x_1 et x_2 le consommateur achète t'il en *t1*, et en *t2* ? Quel constat peut on faire ?

<u>Question 3 :</u> Le passage de *t1* à *t2* s'est traduit par un effet qu'il faut qualifier et décomposer en *effet de revenu et effet de substitution.* Commenter le résultat de cette décomposition. Représenter graphiquement les trois effets sur un graphique.

<u>Corrigé</u>

<u>Question 2 :</u> On se contente de reporter dans les fonctions de demande (question 1) les valeurs énoncées pour *t1* et *t2*.

Soit : en *t1* : x_1 = (R-1)/(2×1) = (3-1)/2 = 1 et x_2 = (R + 1)/2×1 = (3+1)/2 = 2

en *t2* : x_1 = (R-2)/(2×1) = (3-2)/(2×1) = ½ et x_2 = (R+2)/(2×2) = (3+2)/(2×2) = 5/4

La hausse du prix p_2 s'est traduite par une réduction des quantités consommées des deux biens, à revenu constant. L'optimum est en *t1 :* E (x^*_1,x^*_2) = E(1,2) sur une courbe d'indifférence initiale.

<u>Question 3 :</u>

On émet l'hypothèse suivant laquelle le niveau système de prix en *t2* (soit p_1=1 et p_2=2) n'a pas modifié la satisfaction du consommateur, qui conserve donc le même niveau d'utilité. Ceci en raison du bénéfice supposé d'une *« variation compensatrice de revenu »* (par exemple une *subvention*).

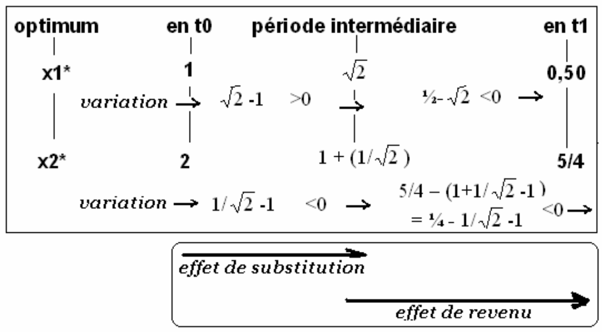
Cette hypothèse crée une *situation intermédiaire* (ou imaginaire) et donc un optimum qu'il faut déterminer.

L'optimum doit vérifier la double condition : conserver l'utilité initiale et être conforme aux prix de marché en *t2*. On écrit simplement pour qu'elle soit vérifiée , que *à l'optimum* le $TMS_{y/x}$ = *(p_1/p_2) en t2,* Soit : $TMS_{x2/x1} = \dfrac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \dfrac{x2-1}{x1} = \dfrac{1}{2}$

On sait par ailleurs qu'à l'optimum $TMS_{x2/x1} = -(dx_2/dx_1)$ qui est l'opposée de la pente de la courbe d'indifférence en un point. Soit cette courbe : $U^* = U(x_1,x_2) = x_1\,(x_2-1)$, qui s'écrit avec les quantités consommées en *t1* ($x_1=1$ et $x_2=2$) : $U^* = 1\,(2-1) = 1\times1 = 1$ le niveau de satisfaction à respecter.
La courbe s'écrit par conséquent $U^* = x_1\,(x_2-1) = 1$ ➔ $1/x_1 = x_2-1 \Leftrightarrow x_2 = 1/x_1 + 1 = 2/x_1$.
Donc $x_2 = 2/x_1$ et la dérivée $(dx_2/dx_1) = -(1/x_1^2)$ ➔ $TMS_{x2/x1} = -(dx_2/dx_1) = -(-(1/x_1^2)) = (1/x_1^2)$
A l'optimum : $(1/x_1^2) = ½$ et donc $x_1^2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2}$
Pour déterminer l'autre quantité x_2, on remplace x_1 dans U* : $U^* = \sqrt{2}\,(x_2 - 1) = 1$
soit $\sqrt{2} = 1/(x_2 - 1)$ ➔ $(x_2 - 1) = 1/\sqrt{2}$ et donc $x_2 = 1 + (1/\sqrt{2})$.

L'optimum dans la situation imaginaire est $E''(x_1^*, x_2^*, U^*) = E''(\sqrt{2}, 1 + (1/\sqrt{2}, 1)$.

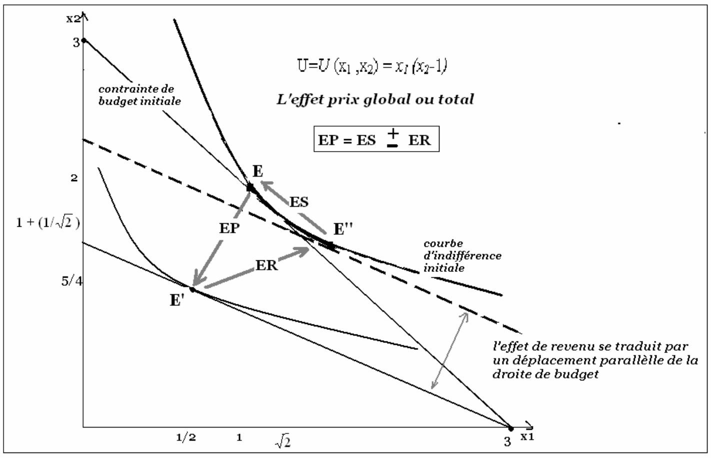
Connaissant la situation initiale et la situation finale intermédiaire, il est possible de définir
l'effet de substitution revenu comme *le passage de la situation initiale(t1) à la situation intermédiaire*, et *l'effet de revenu comme passage de la situation intermédiaire à la situation finale* (t1). Soit :



EFFET PRIX

La hausse du prix p_2 se traduit dans un premier temps par un *effet de substitution* : le consommateur augmente les quantités x_2 et diminue x_1,
Puis, les deux biens étant normaux, les quantités x_1 et x_2 diminuent dans un second temps, du fait d'un *effet de revenu*.
L'effet prix est la somme des deux effets de substitution et de revenu, telle que :
Les quantités x_2 cumulent *l'effet de substitution et l'effet de revenu*
x_1 subissent un effet de substitution >0, puis un effet de revenu négatif.
C'est pourquoi, l'effet prix (x_1,x_2) = *effet de substitution* $\pm$ *effet de revenu*
L'optimum en *t2* est donc E' (x^*_1,x^*_2) = E(1/2,5/4) sur une courbe d'indifférence de niveau inférieur à la courbe initiale.

La représentation graphique illustre ces déplacements d'optima de E à E'' et à E'. Le revenu R étant constant et égal à 3, et les prix égaux à l'unité, la droite de budget initiale à pour coordonnées $(x_1,x_2) = (R/p_{x1}, R/p_{x2}) = (3,3)$.



Remarque : l'effet de substitution (passage de E à E'') nécessite l'hypothèse d'une « variation de revenu compensatoire ». Il est possible de déterminer le montant de cette variation, connaissant

$x^*_1 = \sqrt{2}$ et $x^*_2 = 1 + (1/\sqrt{2}$). La contrainte s'écrit : $R = x_1p_1 + x_2p_2 = \sqrt{2} + (1 + (1/\sqrt{2}\ ) = 2 + 1\sqrt{2}$

La variation de revenu est donc égale à :

revenu compensatoire - revenu initial = (2 + 1) – 3 = $2\sqrt{2}$ - 1 = 1,83

b) **Second exemple (IMPORTANT) : la fonction d'utilité U = (x+2) (y+2) (avec x et y ≥ 0) (*cf encadré ci-dessous)***

Cet exercice, comme les exercices 3,4 et 5 du dossier de travaux dirigés, est un *« exercice complet sur la théorie du comportement du consommateur »* (c'est-à-dire : *de la maximisation de l'utilité à l'équation de la courbe de demande).*

De la question 4 à la question 6 est traitée la *décomposition de l'effet prix*.

La question 7 permet d'exposer la méthode de recherche de l'équation des ***courbes de revenu consommation (CRC) et surtout la courbe d'effet prix ou de prix consommation (CPC)***. Il est proposé également de déterminer l'équation *des courbes de demande* « parétienne » *et* « compensée » du bien *x*.

♦

(IV325 - b) **Second exemple : la fonction d'utilité U = (x+2) . (y+2)** (avec x et y ≥ 0)
Le consommateur possède un revenu R = 14

Question 1 : **1.1)** Calculer les utilités marginales et le $\mathbf{TMS_{y/x}}$.

1.2) Donner l'expression générale des courbes d'indifférence sous la forme d'une fonction ***y = f* (x,U).**

1.3) Déduire une seconde expression du $TMS_{y/x}$.

1.4) Donner une définition littérale du $TMS_{y/x}$.

1.5) Soit les deux niveaux d'utilité $\mathbf{U^0=36}$ **et** $\mathbf{U^1=81}$, représenter les deux courbes d'indifférence correspondantes.

Question 2 : Soit les prix des deux biens $\mathbf{p_x = 4}$ **et** $\mathbf{p_y = 1}$. Ecrire l'équation de la contrainte de budget sous la forme *y = f(x)* et la représenter graphiquement.

Question 3 3.1) Déterminer la combinaison optimale $\mathbf{\Omega_1}$ par la *méthode du remplacement*

3.2) Vérifier ce résultat par la méthode du Lagrangien

Question 4 : L'état met en place un *système d'impôts (ou de subventions)* réduisant (ou augmentant) le revenu des consommateurs de sorte que son niveau d'utilité ne soit aucunement affecté parles variations de *prix*. Or, postérieurement à cette décision, les prix respectifs des deux biens se sont égalisés, soit $\boldsymbol{p_x=p_y=1}$. Un impôt est donc prélevé sur le consommateur pour le maintenir au même niveau de satisfaction qu'avant la variation de prix.

4.1) La combinaison optimale va t'elle rester en Ω_1 ? Sinon pourquoi, et quel est le nouvel optimum $\mathbf{\Omega_2}$?

4.2) Quel est le montant de l'impôt prélevé sur le consommateur ?

Question 5 : Les prix restant inchangés, et le système fiscal abandonné, quel est alors le nouvel optimum $\mathbf{\Omega_3}$.

Question 6 : Donner une interprétation économique précise du passage de l'optimum Ω_1 à l'optimum Ω_3, en complétant le cas échéant le graphique.

Question 7 : Déterminer l'équation des courbes

7.1) d'Engel si $p_x=p_y=1$ **7.2) d'Effet prix quand R=14 et** $\mathbf{p_y=1}$

7.3) de demande « parétienne » et de demande «compensée » quand R=14 et $\mathbf{p_y=1}$.

Réponse à la question 1.1) L'U_m de chaque bien est donnée par la dérivée partielle de la fonction U, par rapport aux quantités consommées du bien. Soit : $U_{mx} = \partial U/\partial x = (y+2)$ et $U_{my} = \partial U/\partial y = (x+2)$. Le $\mathbf{TMS_{y/x}}$ est égal au rapport des Utilités marginales, soit $TMS_{y/x} = (\partial U/\partial x)/(\partial U/\partial y) = (y+2)/(x+2)$

Réponse à la question 1.2) L'équation recherchée est obtenue en changeant de membre, soit $y = [-2x+(U^*-4)]/(x+2)$

Réponse à la question 1.3) Le $\mathbf{TMS_{y/x}}$ est alors l'opposé de la pente de la tangente en un point de la courbe d'indifférence, soit $TMS_{y/x} = -(dy/dx) = U^*/(x+2)^2$ (la dérivée étant du type $y' = (1/x)'$)

Réponse à la question 1.4) Le $\mathbf{TMS_{y/x}}$ est *le taux auquel le consommateur doit substituer des quantités du bien X à celles du bien Y pour conserver un même niveau de satisfaction.*

Réponse à la question 1.5) Le graphique est présenté en fin d'encadré ci-dessous. Les deux courbes d'indifférence étant : $y = (32-2x)/(x+2)$ (courbe inférieure) et $y = (77-2x)/(x+2)$ (courbe supérieure).

Réponse à la question 2) La contrainte de budget s'écrit $R = xp_x + yp_y \Leftrightarrow y = -x(p_x/p_y) + (R/p_y)$, soit sous cette forme *y = f(x)*, en remplaçant les variables par leur valeur : $y = -4x + 14$ (voir graphique, la droite AB).

Réponse à la question 3.1) Dans l'expression U = (x+2) . (y+2) on remplace y par y = -4x + 14 (la contrainte). On alors $U = (x+2).(-4x+14+2) = (x+2).(-4x+16)$ en effectuant les produits on a : $U = -4x^2 + 8x + 32$. Les conditions d'optimisation du premier et du second ordre s'écrivent : $\partial U/\partial x = 0$ et $\partial^2U/\partial x^2 < 0$. Comme $\partial U/\partial x = -8x + 8$ alors $-8x + 8 = 0$ pour $x=1$. Et, d'après la contrainte $y = (-4\times1)+14 = 10$. *L'extremum est atteint au point* $\Omega_1(x^*,y^*,U^*) = (1,10,36)$, car $U^* = (1+2).(10+2) = 12\times3 = 36\ U^0$. Cette extremum est un *maximum* si $\partial^2U/\partial x^2 < 0$. Ce qui est le cas puisque $\partial^2U/\partial x^2 = -8 < 0$. *L'extremum est donc un optimum.*

Réponse à la question 3.2) Le programme du consommateur s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Max } U = U(x,y) = (x+2).(y+2) \\ \text{Sc} : y + 4x - 14 = 0 \end{cases}$$

On forme le Lagrangien, soit : $F(x,y,\lambda) = (x+2).(y+2) + \lambda(y-4x-14)$. Le système des dérivées partielles annulées simultanément (ou condition du premier ordre) s'écrit :

$$\begin{cases} \delta F/\delta x = y+2+4\lambda = 0 & (1) \\ \delta F/\delta y = x+2+2\lambda = 0 & (2) \\ \delta F/\delta\lambda = y-4x-14 = 0 & (3) \end{cases}$$

La solution de ce système donne : x=1 y=10 λ= - 3. On supposera que la condition du second ordre $|D^2| > 0$ est réalisée. Donc l'extremum est donc bien un *maximum*. L'optimum est bien $\Omega_1(x^*,y^*,U^*) = (1,10,36)$,

Réponse à la question 4.1) La combinaison optimale ne peut rester en Ω_1 puisque les prix des biens ont changé. Mais par hypothèse le nouvel optimum Ω_2 doit se situer sur la même courbe d'indifférence $U^*=U^0=36$. Cette hypothèse est celle d'une *demande compensée*.Par l'impôt ou la subvention, l'Etat maintient le consommateur au même niveau de satisfaction qu'avant la variation de prix.
Cette hypothèse fait apparaître un *effet de substitution pur*.
Pour déterminer *le nouvel optimum (Ω_1), puisqu'on connaît $U^0=36$, on recourt à la méthode simple, soit : *à l'optimum le $TMS^{y/x}$ est égal au rapport des prix*, qui est ici $p_x/p_y = 1/1 = 1$.
Ce qui donne $36/(x+2)^2 = 1 \Longrightarrow (x+2)^2=36$ et comme $x \geq 0$ alors $x+2=6$ et donc $x=4$. En remplacant dans U^0 on obtient $y = (32-2x)/(x+2) = 24/6 = 4$. Soit alors l'*optimum* Ω_2 *(4,4,36).*
Réponse à la question 4.2) La dépense totale du consommateur s'écrit en ce point : $R=x.p_x + y.p_y$ donc R = (1×4)(1×4) = 8. Le revenu avant impôt étant R=14, l'impôt est donc égal à : I =6.
La droite A'B' du graph représente alors la contrainte avec impôt.
Réponse à la question 5) La nouvelle contrainte de budget (droite A'B'' du graph) s'écrit (sans impôt) $y = -x + 14$ (puisque $p_x=p_y=1$). On peut alors adopter la méthode du remplacement pour déterminer Ω_3.
Soit alors la nouvelle fonction $U = (x+2).(-x+14+2) = (x+2).(-x+16) = -x^2+14x+32$. On applique les conditions du premier et du second ordre. Soit $\partial U/\partial x = -2x+14 = 0 \Longrightarrow x = 7$ et donc $y = 7$ et $U^*=81=U^1$. La dérivée seconde est bien négative : $\partial^2 U/\partial x^2 = -2 < 0$. *L'extremum est donc un optimum*, et s'écrit : Ω_3 (7,7,81).

Réponse à la question 6) (Voir le tableau résumé du cours). Le passage de l'optimum Ω_1 à Ω_3 représente ici un *effet prix*, décomposable en un *effet de substitution* (Ω_1 à Ω_2) et un *effet de revenu* (Ω_2 à Ω_3).

Réponse à la question 7.1) (voir définition de la courbe d'Engel). **Courbe d'Engel = effet revenu**.
Le long de cette courbe est donc vérifiée l'égalité : $TMS_{y/x} = -dy/dx = -(p_x/p_y)_{constant}$. Or, $p_x=1$et $p_y=1$, donc : $-U/(x+2)^2 = -1 \Longrightarrow U = (x+2)^2$, et comme $U = (x+2).(y+2)$ alors $(x+2).(y+2) = (x+2)^2$
Puisque $x \geq 0$ alors $(x+2)=(y+2)$ et donc on peut en déduire l'équation de la courbe d'Engel $y = x$
La courbe est ici la première bissectrice des axes.

Réponse à la question 7.2) (voir définition de la **courbe d'Effet prix).** Cette courbe est de la forme :
$y = f(x)$. Le revenu R, et p_y étant donnés, la courbe est déduite du système de 3 équations à 3 inconnues suivants (y,x,p_x), qu'il s'agit *de réduire à 2 en éliminant p_x*. Soit ce système :

$$\begin{cases} y = -(p_x/p_y)x + (R/p_y) = -x.p_x + 14 \text{ (car R=14 et } p_y=1) & (1) \\ U = (x+2).(y+2) & (2) \\ \text{A l'optimum : } TMS_{y/x} = -(px/py) \Leftrightarrow -U/(x+2)^2 = -1 & (3) \end{cases}$$

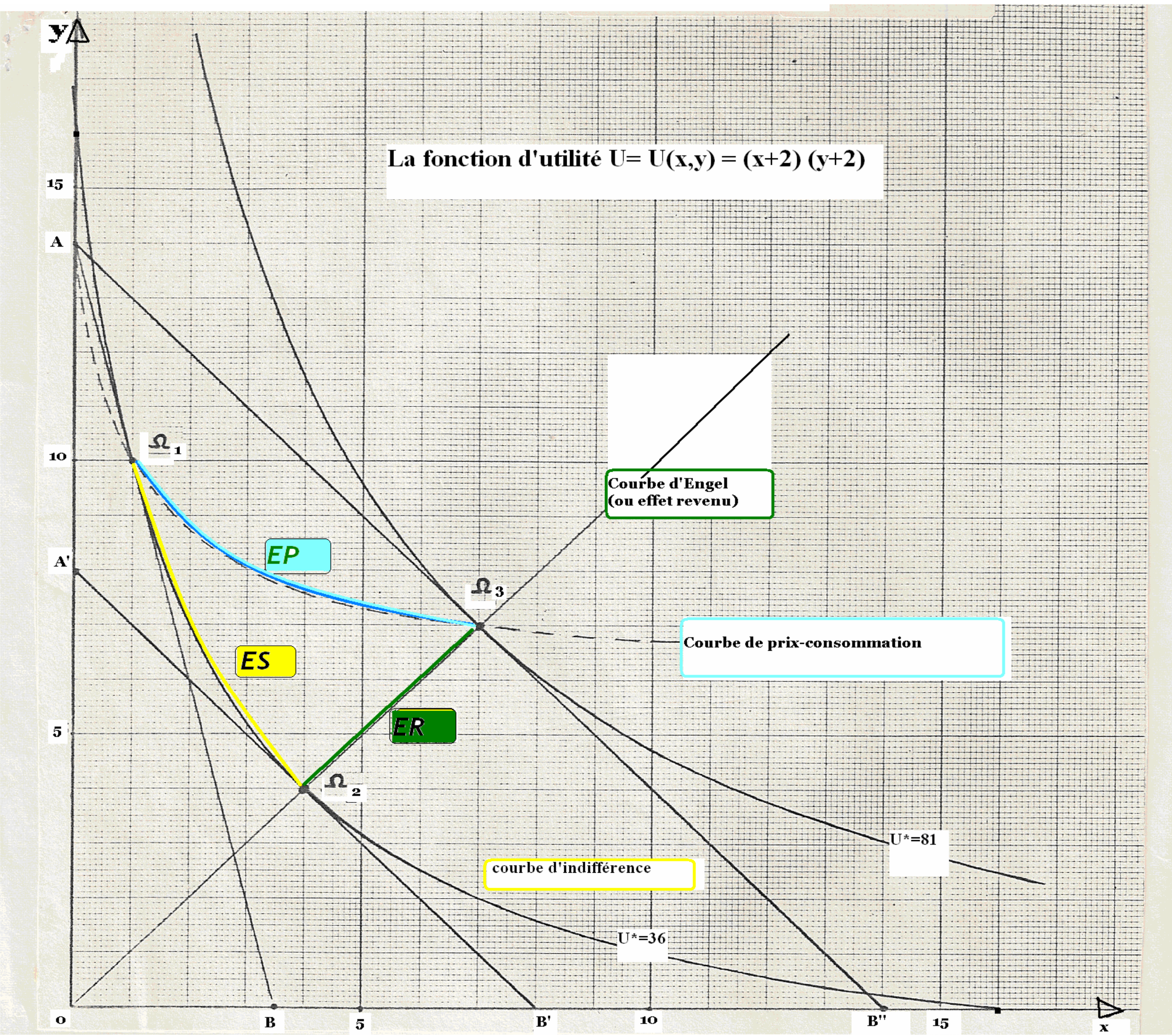
On remplace (3) dans (1) ===> $y = -[(U/(x+2)^2)\times x] + 14$ en remplaçant $U=(x+2).(y+2)$, on a :
$y = [[-x(y+2)] + 14(x+2)] / x+2 = (-xy + 12x + 28) / x+2 \Longrightarrow x+2 = (-xy + 12x + 28) / y$
$= -x + [(12x + 28)/y] \Longrightarrow 2x+2 = (12x+28)/y$ et donc $y = (12x+28)/(2x+2) = (6x+14) / x + 1$
Réponse à la question 7.3) La demande parétienne est la *demande normale* et s'écrit : $x=f(p_x)$. Sa construction utilise le même système d'équations que ci-dessus, la variable à éliminer étant cette

$-U/(x+2)^2 = -p_x$ comme U= $(x+2).(y+2)$, en remplaçant on a : $-[(x+2).(y+2)]/(x+2)^2 = -p_x$ en simplifiant à gauche $-(y+2)/(x+2) = -p_x$ en multipliant par -1 et en changeant de membre ===> $(y+2) = (x+2).p_x$ et donc $y = [(x+2).p_x] - 2$. Comme y est aussi la contrainte $y = 14 - x.p_x$ en égalisant on a : $[(x+2).p_x] - 2 = 14 - x.p_x \Leftrightarrow [(x+2).p_x] - 2 - 14 + x.p_x = 0$ en factorisant par p_x l'expression devient : $p_x(2x+2) - 16 = 0$ ===> $p_x(2x+2) = 16$ d'où $p_x = 16/(2x+2) = 8/x+1$.
L'expression recherchée étant de la forme $x=f(p_x)$, on transforme $p_x = 8/x+1 \Leftrightarrow p_x(x+1) = 8$ soit $x.p_x + p_x = 8$ ===> $x = (8-p_x)/p_x$.
L'équation de la **demande *parétienne*** *est donc* $x = (8/p_x) - 1$
L'équation de la *courbe de* ***demande compensée*** est du *type* $x = f(U^*,p_y,p_x)$. On peut la définir comme celle de la courbe de *l'effet de substitution.* C'est donc une *construction mathématique* telle que : p_x *est la variable,* Par un impôt ou une subvention on fait varier le revenu pour conserver le même niveau de satisfaction. Ce qui est *fictif*, puisqu'on ne sait *à priori* sur quelle courbe d'indifférence on se situe. Mais cela permet d'isoler *l'effet de substitution*.
Pour le calcul de cette équation, on écrit l'égalité *A l'optimum :* $TMS_{y/x} = (px/py)$

$$\Leftrightarrow -U^*/(x+2)^2 = (px/py) \implies (x+2)^2 = U^*(p_x/p_y) \implies (x+2) = \sqrt{U*\frac{py}{px}} \text{ Et donc}$$

$$x = \sqrt{U*\frac{py}{px}} - 2$$ l'équation de la *demande compensée*.

Graphique de **U = (x+2) . (y+2)**



V) L'élasticité de la demande

Nous avons évoqué plus haut l'importance du concept d'élasticité, celle de la demande, en mentionnant qu'il était précieux en analyse économique. Nous développons ce concept dans le paragraphe V).

V1) Définitions

V11) La notion générale d'élasticité.

Si comme les économètres nous appliquons à toute fonction mathématique, la notion de « modèle », nous pouvons dire par exemple que la fonction élémentaire de la demande d'un bien en fonction du prix et du revenu, soit $\mathbf{q_x = f(px, R)}$ décrit un modèle. Elle devient représentation abstraite d'un phénomène économique, dans laquelle les membres de gauche et de droite jouent un rôle spécifique. Le membre de gauche (q_d) est ***la variable « expliquée »*** (ou qu'il s'agit d'expliquer), tandis que le membre de droite (*px*, R) comporte ***les « variables explicatives ».*** Un modèle mathématique est donc la mise en relation d'une variable *expliquée*, avec une ou plusieurs *variables explicatives*.

Cette définition nous permet d'aborder simplement la notion d'élasticité. D'une manière générale (dans tout modèle), l'élasticité ***est le rapport de la variation relative de la variable expliquée à la variation relative de la variable explicative*** (les autres étant le cas échéant considérées comme données).

L'élasticité est donc le rapport de deux variations relatives : celle de la variable expliquée au numérateur, et celle de la variable explicative au dénominateur. Ce rapport mathématique (emprunté aux Physiciens) donne un résultat, qui permet de mesurer la sensibilité d'une variable aux variations d'une autre variable. Ou encore, il permet de mesurer la *réaction* (en termes de variation relative) de la variable expliquée, aux variations relatives de la variable explicative.

On ne s'étonne pas que l'élasticité soit fréquemment utilisée par les économistes. Le caractère synthétique de l'information donnée par le résultat, est d'autant plus apprécié que le calcul porte sur des variations relatives (*à la marge*), ceci quelque soit le domaine d'analyse.

V12) définition mathématique

V121) ne pas confondre *élasticité* et pente.

a) L'élasticité : écriture différentielle

La définition ci-dessus pourrait laisser penser que la variation relative, renvoie *à la pente de la fonction*, donnée par la dérivée. En fait la pente n'est qu'un des éléments de la définition mathématique.

Soit deux variables *x* et *y* liées parla relation $y=f(x)$. On appelle *élasticité de y par rapport à x* en un point de la courbe [$y_0=f(x_0)$]*, le rapport des variations relatives, noté*

$\varepsilon_{y/x} = (dy/y_0)/(dx/x_0) \Leftrightarrow (dy/dx)\times x_0/y_0 \Leftrightarrow f'(x_0) \times x_0/y_0$

Il faut noter que le symbole utilisé (ici ε) est variable selon les manuels. On peut par exemple remplacer (dy/y) par E_y et (dx/x) par E_x, pour écrire la formule de l'élasticité de y par rapport à x **:** $\mathbf{E_{y/}Ex}$.

Plus généralement, sachant que le calcul est réalisé en un point on écrit l'élasticité de y par rapport à x :

$$\varepsilon_{y/x} = (dy/y)/(dx/x) \Leftrightarrow (dy/dx)\times x/y \Leftrightarrow f'(x) \times x/y$$

On lit que le premier terme est *la dérivée* de la fonction, dont on effectue le produit avec le rapport des variables (x/y). A la dérivée vient donc s'ajouter dans la définition un terme (x/y) qui est une mesure de l'intensité de la liaison fonctionnelle entre la variable explicative et la variable expliquée. Ce qui modifie le résultat lorsque la fonction est celle d'une droite, dont la dérivée est constante.

b) La formule logarithmique de l'élasticité

Pour parfaire la définition mathématique on sait de plus qu'il y a identité entre :

$\varepsilon_{y/x} = (dy/y)/(dx/x) \Leftrightarrow d(\mathrm{Log}\,y)/d(\mathrm{Log}\,x)$: *L'élasticité est égale au rapport des différentielles logarithmiques de y et x.*

Dans l'expression $\varepsilon_{y/x} = (dy/y)/(dx/x) = (dy/dx) \times x/y$ (écriture différentielle), on peut effectuer la transformation suivante :

On sait que Log(x) a pour dérivée *1/x*, soit : d(Log *x*)/d*x* = 1/x. De plus l'expression (dy/dx) × 1/y désigne la dérivée logarithmique de *y =f(x)*, soit : d(Log y)/dx = d(Log y/dy)×(dy/dx) = 1/y×(dy/dx). Donc :

$\varepsilon_{y/x}$ = d(Log y)/dx / d(Log *x*)/d*x* = d(Log*y*)/d(Log*x*). On retrouve la définition $\varepsilon_{y/x}$ = (dy/y)/(dx/x) en passant en écriture différentielle, soit :

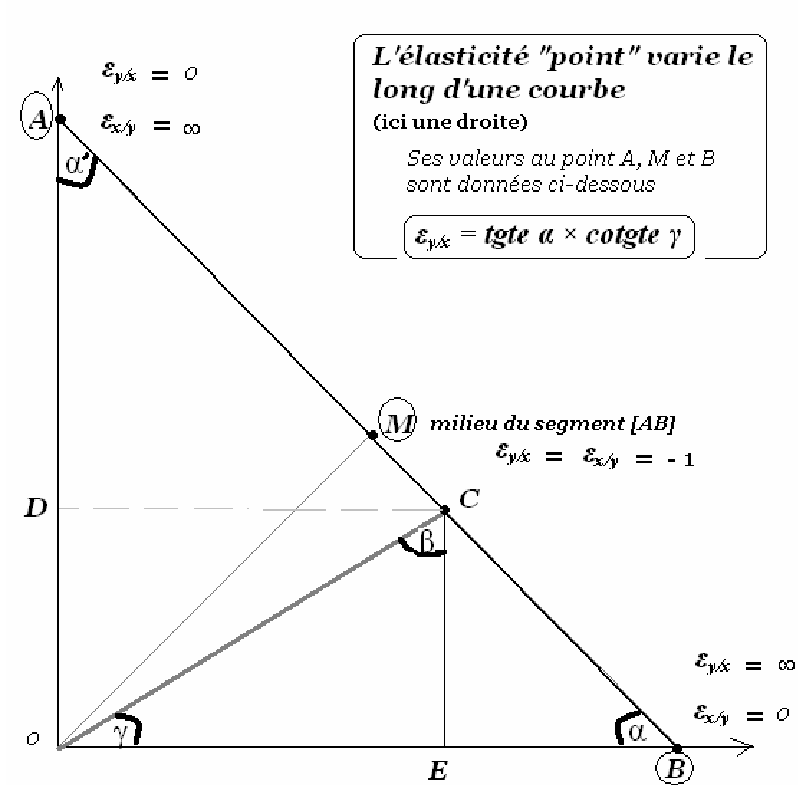
d(Log y) = d(Log y)/dy ×dy = (1/y)dy = dy/y qui est la différentielle logarithmique de y

d(Log x) = d(Log x)/dx ×dx = (1/x)dx = dx/x qui est la différentielle logarithmique de x.

Par conséquent *l'élasticité est égale au rapport des différentielles logarithmiques de y et x*.

L'intérêt de cette écriture (rapport des dérivées logarithmiques) est *géométrique*, puisque la représentation graphique (Log-Log) permet de mesurer directement *l'élasticité en un point de la courbe par le coefficient directeur de la tangente en ce point*.

Suivant la définition, l'élasticité varie aux différents points d'une courbe. Ce n'est que dans des cas particuliers (voir infra V14) que l'élasticité est constante. Le cas général est donc celui d'une *fonction linéaire* de type *y = ax* +b, représentée par la droite [AB] ci-dessous, dont on calcule l'élasticité au point C.



La formule de base s'écrit pour la fonction (*y = ax* +b) : $\boldsymbol{\varepsilon_{y/x}}$ *= (dy/dx).(x/y)*

(dy/dx) = OA/OB = tgte α = constante

(x/y) = OE/CE = cotgte γ

Par conséquent : $\varepsilon_{y/x}$ *= tgte α × cotgte γ*

La valeur de l'élasticité dépend de l'angle γ. Elle varie donc selon la position du point C sur la droite [AB].

Le graphique indique les valeurs prises par $\varepsilon_{y/x}$ aux point caractéristiques A, M (milieu du segment) et B.

V122) Interprétation – Propriétés et exemples (Applications).

a) Interprétation :

Partant de la fonction *y=f(x),* En appelant *k*, le résultat de ($\varepsilon_{y/x}$) , ce résultat signifie que lorsque x *augmente de 1%* à partir de x_0 (soit dx/x_0 = 1/100) , alors *y* augmente de « *k%* » à partir de y_0.

Un tel constat présente deux intérêts :

- L'élasticité est un nombre sans dimension, et donc ne dépend pas des *unités* de mesure des grandeurs étudiées,
- Elle porte sur des variations relatives, et donc sur les changements des grandeurs, si communs en économie. Il en est ainsi par exemple des variations des taux de croissance.

b) Propriétés

Les propriétés importantes de l'élasticité utilisées dans les exemples sont :

1- rapport de fonction : $y=u/v$ alors $\varepsilon_{y/x} = \varepsilon_{u/x} - \varepsilon_{v/x}$ *l'élasticité d'un rapport de fonctions est égale à l'élasticité de la fonction du numérateur diminuée de celle de la fonction du dénominateur*.

2- Produit de fonctions : $y = u(x)\times v(x)$ *l'élasticité d'un produit de fonctions est égale à la somme des élasticités des fonctions* : soit $\varepsilon_{y/x} = \varepsilon_{u/x} + \varepsilon_{v/x}$

3- Fonction puissance (voir infra V14) : $y = x^{\alpha}$ alors $\varepsilon_{y/x} = {}^{\alpha}$ *l'exposant de la fonction.*

3- fonction de fonction : $y = f(u)$ alors $\varepsilon_{y/x} = \varepsilon_{y/u} \times \varepsilon_{u/x}$

4- fonctions réciproques : *démonstration*

Soit $y = f(x)$, la réciproque s'écrit : $x = f^{-1}(y)$

$\varepsilon_{y/x} = y'_x \times (x/y)$ et $\varepsilon_{x/y} = f^{-1'}(y)\times(y/x) \Leftrightarrow 1/f'(x)$ et donc $\varepsilon_{x/y} = 1/\ \varepsilon_{y/x}$ les fonctions réciproques ont des élasticités inverses l'une de l'autre.

c) Exemples :

Exemple 1

Soit la fonction linéaire affine P = 5 – q/2000 (P>0 si q <10.000)

a) écrire la relation donnant l'élasticité de P par rapport à q
b) déterminer les valeurs de l'élasticité en plusieurs points : successivement q= 2000 ;4000 ;5000 ;6000 ;8000. ; représenter graphiquement et interpréter les résultats

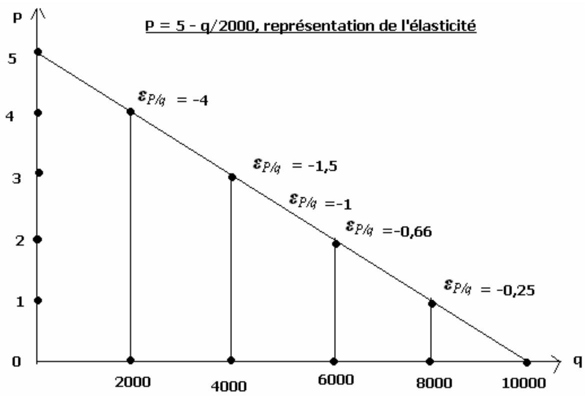
a) $\varepsilon_{P/q} = (dp/dq) \times q/p \Leftrightarrow [1/(dP/dq) \times p/q]$

(dP/dq) = -(1/2000) c'est la dérivée, et donc (dp/dq) × q/p = - (q/2000P) ⇔par inversion à - (2000P)/q

Les calculs demandés donnent les résultats suivants :

q	**2000**	**4000**	**5000**	**6000**	**8000**
P	**4**	**3**	**2,5**	**2**	**1**
$\varepsilon_{P/q}$	**-4**	**- 1,5**	**-1**	**- 0,66**	**-0,25**

Représentation graphique :



La réciproque s'écrit
q = - 2000p + 10.000
10.000 est l'abscisse à l'origine
Et par exemple si p= 5 ===> q=0

Interprétation simplifiée des résultats de l'exemple 1 :

La mesure du degrés de sensibilité de P à q montre que l'élasticité $\varepsilon_{P/q}$ *est négative*. De plus, on constate que I $\varepsilon_{P/q}$I (la valeur absolue de l'élasticité) *est décroissante* le long de la droite. On passe d'une élasticité « forte » (>1) à une *faible élasticité* (<1).

➔ Il n'y a donc pas identité entre la pente (constante) et l'élasticité variable en chaque point.

➔ La fonction choisie en exemple est représentative de la relation qui lie la demande d'un bien au prix de ce bien. Ici P = *px* et q = q_x. On retrouve si on le souhaite la relation connue $q_x = f(px)$, en déterminant la réciproque de la fonction de l'exemple = P=*f*(q). Mais il est préférable de conserver cette dernière forme nécessaire pour une représentation graphique conforme de la fonction de demande (Ceci sera développé dans la partie consacrée à l'équilibre du marché). Dans ces conditions, l'élasticité calculée ($\varepsilon_{P/q}$) devient $\varepsilon_{q/px}$ et est appelée ***élasticité de la demande par rapport au prix ou « élasticité prix***

directe de la demande ». Elle indique comment varient les quantités demandées lorsque le prix diminue (ou augmente). La relation inverse entre les deux grandeurs est donnée par le signe négatif de l'élasticité. Mais surtout, quand le prix est élevé (P=5), la demande est dite d'abord « fortement élastique » ($\varepsilon_{q/px} > 1$), puis à mesure de la satisfaction, voire de la saturation, les quantités demandées sont moins sensibles à la variation du prix (elle devient « inélastique »). Ainsi pour un prix P=4, une baisse de 1% du prix entraîne une hausse de 4% des quantités demandées, tandis que pour P= 1, la hausse des quantités demandées n'est que de 0,25%. C'est l'une des élasticités les plus fréquemment calculée (voir plus loin).

Exemple 2 : On détermine pour les valeurs de *x* indiquées entre parenthèse la valeur de $\varepsilon_{y/x}$ des fonctions .
2a) $y = -1,5\ x + 7,5$ (pour x = 3,75)
On applique l'expression $\varepsilon_{y/x}$ = (dy/y)/(dx/x) = (dy/dx) × x/y (écriture différentielle), soit :
$\varepsilon_{y/x}$ = -1,5 (x/ (-1,5 x + 7.5) = (-1,5×3,75)/ $-1,5\ x + 7,5$ = -5.675/1.875 = - 3
2b) Produit de fonctions : $y = (x^2+5).\ (x^3 +5x).\ \sqrt{x}$ (pour x = 5)
Le produit est celui de deux fonctions polynômes en x, et une fonction racine. Cette dernière s'écrit aussi $\sqrt{x} = (x)^{1/n}$ et donc l'élasticité est égale à l'exposant, soit ici (1/n = 1/2). Au total, la somme des élasticités est :
$\varepsilon_{y/x}$ = [(2x+x)/(x²+5)] + [(3x²+5) x /(x³+5x)] + ½ = (2x²/x²+5)+(3x²+5)x/(x²+5) +0.5 =50/30+80/30+15/30 = 145/30 = 4,833

2c) *ibid :* $y = (4x-6).(x^2-(9/x)).(4/x)$ (pour x = 3)
$\varepsilon_{y/x}$ = (4x/(4x-6)) + (2x+(9/x²)) × x/(x²-(9/x)) – 1 (en dérivant correctement le second polynôme)
= [(4×3)/12-6]×[(2x³ + 9)/(x³-9)] – 1 = 12/6 + (54+9)/(54-9) – 1 = 2 +7/5 – 1 = 2,4
2d) $p_x = 8 - 0.8\ x$ (calculer $\varepsilon_{x/px}$)
Pour calculer $\varepsilon_{x/px}$, il est nécessaire de déterminer la réciproque *x=f(px)*, soit : 0.8x = 8 –px
➔ 8x = 80 – 10px ➔ x = 10 –(5/4)x
$\varepsilon_{x/px}$ = (-5/4)×(px/x) = -5/4 (8-0.8x)/x = (x-10)/x

Exemple 3 : Application des propriétés de l'élasticité
3a) Rapport de fonctions : $y = (10x^2+4)/x^5$ (pour x = 1,5)
$\varepsilon_{y/x}$ = [(20x × x) /(10x²+4)]-5 = [(20x²)/(10x²+4)] -5 = (20×2,25)/(10×2,25×4) = 45/26,5 – 5 = 3,3
3b) *ibid :* $y = (6x+18)/x^2+3x$ (pour x = 1,5)
$\varepsilon_{x/px}$=[6x/(6x+18)] – [(2x+3)x/x²+3x] = [6x/(6x+18)] – [(2x+3)/(x+3)] = [(x-2x-3)/(x+3)] = (-x-3)/(x+3) = -1
3c) *ibid :* $y = (2x^2-18x)/x^2+3$ (pour x = 3)
$\varepsilon_{x/px}$ = [((4x-18)×x)/(2x²-18x)] – (2x×x)/(x²+3) = [(4x-18)/(2x-18)]- (2x²/x²+3)
soit pour x = 3 $\varepsilon_{x/px}$ = (12-18)/(6-18) – (18/12) = (-6/-12) – (18/12) = -1
3d) Fonction de fonction et différentielle logarithmique : $y = (x-5)^3$ (pour x = 10)
On pose $y = f(u_x)^3$ et $\varepsilon_{y/u} = \varepsilon_{y/u} \times \varepsilon_{u/x}$ = 3× (x/x-5) = 3x/x-5 = 6
Ou en écriture logarithmique
Ln *y* = 3 Ln(x-5) soit alors $\varepsilon_{y/(x-5)}$ = (d Lny/ d Ln (x-5)) = 3
et $\varepsilon_{(x-5/x)}$ = x/(x-5) et donc $\varepsilon_{y/x} = \varepsilon_{(x-5/x)} \times \varepsilon_{y/(x-5)}$ = 3*x* / *x-5*
3e) *ibid :* $y = 6(x-5)^3$
En passant en Ln , la résolution est celle de 3d) appliquée à Ln *y* = Ln 6 + 3Ln(x-5)
$\varepsilon_{y/x}$ = 3*x*/(*x*-5)
3f) $y = (12-(1/x))^3 + 12 – 1/x$ (pour x=0.1)
En posant u = 12-(1/*x*) il ressort que la fonction est $y = u^3+u$ et donc $\varepsilon_{y/x} = \varepsilon_{y/u} \times \varepsilon_{u/x}$
= (y'_u ×u/u³+u)×(1/x²)×[x/(12-(1/x)] = [(3u²+1)u/u³+u]×x/(12x²-x)
= [(3u²+1)/(u²+1)]×(x/(12x²-x) ➔ Si *x=0,1* alors *u=2* et $\varepsilon_{y/x} = \varepsilon_{y/u} \times \varepsilon_{u/x}$⇔[(3×4)+1/4+1]×(0,1/(0,12-0,1) = 13/5×10/2 = 13

V13) Elasticité d'arc et élasticité point.(cf résumé en Annexe de ce §)

La définition de l'élasticité fait intervenir des variations relatives. Mais celles-ci peuvent être mesurées de deux manières correspondant à deux définitions complémentaires de l'élasticité, dont l'une a été exposée ci-dessus.

Supposons que la quantité demandée d'un bien X (qx) passe de 90 à 70 unités, consécutivement à une variation du prix *px*, de 7 à 9€.. Les points de coordonnées (90,7) et (70,9) sont respectivement dénommés A et B. Un autre bien Y, voit également sa quantité demandées (q_y) augmenter de 900.000 à 700.000 unités quand *py* passe de 7 à 9€.

Nous nous proposons de calculer l'élasticité-prix directe de la demande de X, de Y, puis de les comparer.

Comme il s'agit de traiter de *variations*, nous utilisons le symbole (Δ). Pour le bien X, la variation de la demande a lieu entre la situation initiale (Aq_x) et la situation finale ou d'arrivée (Bq_x). Elle peut s'écrire :

$\Delta q_x = Bq_x - Aq_x = 70 - 90 = -20$

Cette variation est *absolue*, et reste dépendante des unités de mesure. On préférera donc mesurer *la variation relative de la demande*, donnée par : $\Delta q_x/Aq_x = [Bq_x - Aq_x = 70 - 90 = -20]/ Aq_x = 90$

$= -2/9 = -0{,}222$. Plutôt que la situation de départ (A) on aurait pu utiliser au dénominateur la valeur d'arrivée (B) et calculer ainsi : $\Delta q_x/Bq_x = -20/70 = -2/7 = -0{,}286$

On peut éviter de choisir entre (A) et (B), en prenant *la demande moyenne entre (A) et (B),* notée Mq_x.

On sait que $Mq_x = (Aq_x + Bq_x)/2 = 80$.

La variation relative des quantités est alors donnée par le rapport : $\Delta q_x/Mq_x = -0{,}25$, soit en pourcentages -25%.

La variation relative parallèle du prix *px* est calculée de la même manière en recourant à la moyenne du prix *px*, soit : $\Delta px/Mpx = (P_B) - (P_A) / Mpx = +25\%$.

On appelle alors *élasticité d'arc* (ε_{AB}), l'élasticité calculée à l'aide de ces variations relatives exprimée par le symbole Δ, selon la formule donnée en V121.

$\varepsilon_{AB} = (\Delta q_x/Mq_x) / \Delta px/Mpx = (\Delta qx/\Delta px)\times Mpx/ Mq_x) = -1$.

L'interprétation de ce résultat est la même que celle donnée dans l'exemple du V122, puisqu'il s'agit à nouveau de l'élasticité prix directe de la demande.

Les mêmes calculs prévalent dans le cas du bien Y, et la demande de ce bien q_y. Il n'est pas difficile de conclure que $\varepsilon_{AB} = -1$ aussi pour le bien Y. Bien que les quantités soient plus élevées, le résultat est le même (du fait de la simplification des nombres mis en rapport).

Nous confirmons ainsi l'une des caractéristiques de l'élasticité : *sa valeur est indépendante des unités de mesure*. Elle est donc un nombre sans dimension.

La définition mathématique que nous avons choisie plus haut est de ce fait appelée ***élasticité point* ou *ponctuelle***. Sa raison d'être est sa précision plus grande. Nous obtenons en effet l'élasticité ponctuelle simplement en passant à la limite le calcul des variations relatives.

$$\text{Soit : } \varepsilon_{qx/px} = \lim_{\Delta px \to 0} [(\Delta q_x/q_x)/(\Delta px/px)]$$

Des variations finies nous passons aux variations infinitésimales, et donc à l'écriture suggérée plus haut au moyen des différentielles :

$\varepsilon_{qx/px} = (dq_x/q_x) / (dpx/px)$, qui est une formule de définition, et à la formule de calcul:

$\boldsymbol{\varepsilon_{qx/px} = (dq_x/dpx) \times px/q_x = (q_x)' \times px/q_x}$

ou *élasticité point*

remarque : dans la mesure où nos calculs traitent de liaisons fonctionnelles entre une variable expliquée et une variable explicative, c'est généralement l'élasticité point que nous calculons, en l'appelant simplement *élasticité.*

V14) Isoélasticité ou *le cas des courbes dites isoélastiques*.

Nous avons établi que l'élasticité possède une valeur différente en chaque point d'une courbe. Ce phénomène peut parfois poser des problèmes d'interprétation en analyse économique (cas des études de

marché par exemple). Pour l'éviter, les économistes recourent à des *modèles à* élasticité *constante. Les courbes utilisées sont alors dites* courbes isoélastique.
Recherchons les fonctions répondant à cette exigence. On appelle (q) les quantités demandées et (p) le prix.
On cherche $\varepsilon_{q/p}$, tel que *(dq/q)/(dp/p)* = k une constante quelconque >0 ou <0. En changeant le dénominateur de membre, on a : *(dq/q)* = k *(dp/p)* . En intégrant à gauche et à droite il vient

$$\int (dq/q) = \int k\ (dp/p) = k \int (dp/p)$$

qui est égale selon le tableau des intégrales immédiates à :
ln|q| = k ln|p| + C (C constante d'intégration). En posant C = ln *c*, il vient dans la mesure où p et q sont nécessairement >0 , Ln q = k lnp + ln*c* et par exponentiation
⇔

$$\boxed{\underline{q = c \times p^{k}} \qquad \textit{courbe isoélastique}}$$

On obtient la relation qui définit la famille des courbes isoélastiques, ou à élasticité constante en tout point de la courbe. On démontre que la valeur de ***l'élasticité est alors simplement égale à l'exposant du prix dans la fonction puissance, soit = k.***
En effet
$E_{q/p} = (dq/dp)/p/q = (c\times k\times p^{k-1})\times(p/c\times p^{k}) = (c\times k\times p^{k})/c\times p^{k} = k$

On note que ces fonction sont généralement du type : q = cste/p. On en déduit que si p (au dénominateur) est égal à p^2 alors $\varepsilon = -2$; p alors $\varepsilon = -1$ (on est dans le cas d'une ***hyperbole équilatère***) ; racine(p) ou $p^{1/2}$ alors $\varepsilon = -1/2$.

Enfin, le graphe des courbes isoélastique peut être celui d'une droite à l'aide d'une échelle doublement logarithmique (Log_Log).. En posant Q = lnq et P = lnp, on passe de
Ln q = k lnp + C à **<u>Q = k × p + C</u>**
C (=ln*c*) est l'abscisse à l'origine et k est le coefficient directeur de la droite et la mesure de l'élasticité de la demande. On comprend par cette simplification pourquoi l'économétrie recourt le plus fréquemment aux modèles à élasticité constante.

Exemple (application)
Calculer $\varepsilon_{x/px}$ pour la fonction x = 100/px²
$\varepsilon_{x/px} = (dx/dp_x)\times p_x/x$ avec une dérivée qui est celle d'un rapport de fonctions *(u/v)*, soit :
$\varepsilon_{x/px} = (-2\times100)/p_x^{3}\times(p_x/x)$ et comme x=100/px² ➔ $\varepsilon_{x/px} = (-2\times100)/p_x^{3}\times p_x/\times(p_x^2/100) = -2$ (l'exposant de $x=f(p_x)$
Ou en passant en Ln : x = 100/px²⇔ Ln(x) = Ln(100) – Ln(px²) = -2Ln(px) + Ln(100)
Et donc $\varepsilon_{x/px}$ = dLn(x) = - 2 (la pente de la droite logarithmique)

<u>V2) Les élasticités de la demande et leur interprétation.</u>

On étudie *l'élasticité prix directe de la demande (EP)* (déjà ébauchée) ; *l'élasticité prix indirecte* ou *croisée*(EPC) ; *l'élasticité revenu (ER).* Comment déterminer leur valeur partant d'une fonction de demande à trois variables :*px*, le prix du bien X, ; *py*, le prix d'un autre bien Y ; et R, le revenu du consommateur. La fonction s'écrivant : $\mathbf{q_x = \mathit{f(px, py, R)}}$.

V21) Les élasticités prix : directe et croisée de la demande

V211) L'élasticité prix directe (EP)

Nous avons vu l'essentiel plus haut. La formule s'écrit dans le cas d'une fonction à une seule variable (*px*) : $q_x = f(px)$ ➔ $\varepsilon_{qx/px} = (dq_x/dpx) \times px/q_x$. Lorsqu'il s'agit d'une fonction à plusieurs variables, la dérivée par rapport à *px* est alors une dérivée partielle, *py* et R étant des constantes. Connues. La formule est alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon_{qx/px} = (\delta q_x/\delta px) \times px/q_x}$$

[élasticité prix directe dans le cas d'une fonction à plusieurs variables)

V212) L'élasticité prix croisée (EPC)

La quantité demandée de certains biens n'est pas toujours indépendante ou uniquement déterminée par le prix du bien lui-même. Ceci est notamment le cas des biens dits *complémentaires*, ou des biens *substituables* (déjà vus plus haut : fonction utilité).
Lorsque augmente fortement le prix de l'essence, la quantité demandée de véhicules peut diminuer significativement (essence-voiture = biens complémentaires).
Lorsque le prix du beurre subit une hausse soudaine, la demande de margarine peut augmenter tout aussi soudainement (beurre-margarine = biens substituables).
L'élasticité prix croisée de la demande d'un bien mesure le degrés de sensibilité de la demande de ce bien aux variations du prix d'un autre bien.
Dans la fonction repère, *py* est le prix de cet autre bien. L'élasticité prix croisée du bien X par rapport au prix du bien Y s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon_{qx/py} = (\delta q_x/\delta py) \times py/q_x}$$

(élasticité prix croisée dans le cas d'une fonction à plusieurs variables)

Application sur les élasticités prix directe et croisée
Soit la fonction $x = (R/px^2) + (7py/px)$

a) calculer l'élasticité prix directe de x quand R= 330 et py = 5

En remplaçant $x = (330/px^2) + (35/px) = (330+35px)/px^2$
$\varepsilon_{x/px} = (35px/x$ (la fonction du numérateur) – $[2px\times(px/x)] = (35px/330+35px) - 2(330+35px)/ (330+35px)$
En simplifiant $= (35px/330+35px) - 2$ et si $px = 6$ alors
$\varepsilon_{x/px} = [(6\times35)/(330\times35\times6)]-2 = 1{,}61$

b) calculer l'élasticité prix croisée de x quand R = 330 et px = 6.

En remplaçant $x = (330/36) + (7py/6) = (330+42py)/36 = (7/6)py + 55/6$
$\varepsilon_{x/py} = [((7/6)py\times py)/((7/6)py+55/6) = (7py)/(7py +55)$ et si *py = 5, alors*
$\varepsilon_{x/py} = (7\times5)/(35+55) = 35/90 = 7/18$

V213) L'élasticité revenu (ER)

Il parait évident pour l'analyse de la demande que le revenu des consommateurs est une variable déterminante, de même que le prix des biens. Il importe de connaître *la sensibilité de la demande aux variations de revenu*. Et, il va de soi que cette sensibilité ne sera pas la même selon la catégorie des biens concerné. Ci-après est donnée une typologie élémentaire.
L'élasticité de la demande d'un bien par rapport au revenu mesure donc la réaction de la demande (q_x) aux variations du revenu (R). Suivant la même méthode la formule est alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon_{qx/R} = (\delta q_x/\delta R) \times R/q_x}$$

(élasticité revenu dans le cas d'une fonction à plusieurs variables)

V214) Valeur des élasticité et types de biens : tableau récapitulatif

Soit la fonction de demande : **x = *f*(px, py, R)**

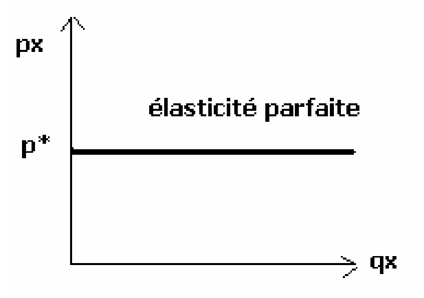
Les trois types d'élasticité, ainsi que les commentaires à tirer de leur valeur sont :

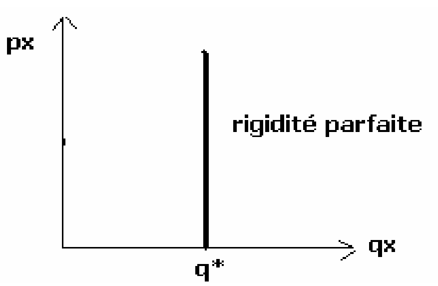
Elasticité prix directe	Elasticité prix croisée	Elasticité revenu
$\varepsilon_{qx/px} = (\delta q_x/\delta px) \times px/q_x$	$\varepsilon_{qx/py} = (\delta q_x/\delta py) \times py/q_x$	$\varepsilon_{qx/R} = (\delta q_x/\delta R) \times R/q_x$
Cas général $\varepsilon_{x/px} < 0$ la demande diminue quand le prix augmente	$\varepsilon_{x/py} > 0$: Biens substituables $\varepsilon_{x/py} < 0$: Biens complémentaires $\varepsilon_{x/py} = 0$: Biens indépendants	Cas général : $\varepsilon_{x/R} > 0$ la demande croît avec le revenu
$\varepsilon_{x/px = 0}$: biens de première nécessité ou ayant peu de substituts. $\varepsilon_{x/px > 0}$: deux cas - biens de Giffen ou alimentaires (ex : pain : la hausse du prix peut entraîner la hausse de la demande) - biens Veblen ou de luxe ou ostentatoires		Mais deux cas généraux à distinguer : - $\varepsilon_{x/R} < 1$: biens normaux ou nécessaires. La demande varie moins que proportionnellement à R. - $\varepsilon_{x/R} > 1$: biens supérieurs ou de luxe. La demande varie plus que proportionnellement à R.
		Et un cas particulier $\varepsilon_{x/R} < 0$: biens inférieurs ou de « mauvaise qualité ». La demande diminue lorsque le revenu augmente.

V22) Demande parfaitement élastique (élasticité parfaite) et demande parfaitement rigide (rigidité parfaite)

On a vu par l'exemple comment le long d'une droite, représentative d'une fonction de demande à une seule variable (px) on pouvait lire le passage d'une demande fortement élastique ($\varepsilon>1$) à une demande faiblement élastique ($\varepsilon<1$). Ce c as est un cas fréquent. Il existe deux cas particuliers.

- à une élasticité prix i*nfinie* ($\varepsilon_{qx/px} \rightarrow \infty$) correspond une droite de demande *parallèle à l'axe des quantités*. La demande est alors dite ***parfaitement élastique***, de sorte que le prix reste constant quelle que soit la variation des quantités.
- à une **élasticité nulle** ($\varepsilon_{qx/px} = 0$) pour tout prix correspond une demande ***parfaitement rigide***. La demande est alors une droite parallèle à l'axe des prix. Quelle que soit la variation du prix, la variation de la demande est nulle.





Ce qui permet de conclure également qu'il existe finalement **3 cas d'élasticité constante** :

$\boldsymbol{\varepsilon_{qx/px} = -1}$ lorsque la demande prend la forme d'une hyperbole équilatère (cas de la fonction logarithmique q = cste/p²)

$\boldsymbol{\varepsilon_{qx/px}} \rightarrow \infty$, demande parfaitement élastique

$\boldsymbol{\varepsilon_{qx/px} = 0}$, demande parfaitement rigide.

ANNEXE au § V) 13

L'ELASTICITE D'ARC –EA-

<u>Définition</u>

Dans un modèle de type *y=f(x)* où *y* est la variable expliquée, et x la variable explicative, l'EA mesure l'importance des réactions de *y* à une variation de la variable explicative *x*.
L'EA évalue cette réaction entre deux points A et B d'une courbe plus ou moins espacés et qui forment un arc .

L'ELASTICITE POINT ou PONCTUELLE –EP-

<u>Définition</u>

Dans un modèle de type *y=f(x)* où *y* est la variable expliquée, et x la variable explicative, l'EP mesure l'importance des réactions de *y* à une variation de la variable explicative *x*.
L'EP évalue cette réaction en un point de la courbe.

ECRITURE MATHEMATIQUE GENERALE DES REACTIONS DE *y* A UNE VARIATION DE *x*, lorsque *y = f(x)*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{y/x} = \frac{\textit{réaction de la variable expliquée (en \%)}}{\textit{variation de la variable explicative (en \%)}} = \frac{E(y)}{E(x)}$$

<u>Ecriture mathématique de l'EA entre A et B, dans le sens de A vers B.</u>

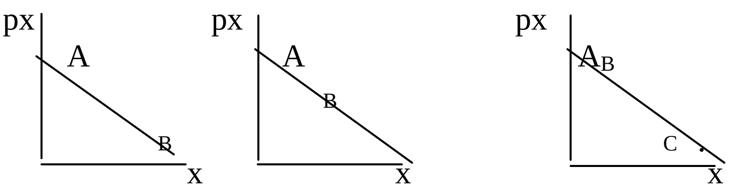
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{y/x} \text{ ou } [E(y)/E(x)] = \frac{\text{Variation de l'ordonnée de A vers B}}{\text{Variation de l'abscisse de A vers B}}$$

$$= \frac{(\Delta y/y) \times 100}{(\Delta x/x) \times 100} = (\ldots)\% \quad >0 \text{ ou } <0$$

Le résultat
Par exemple *une élasticité prix de la demande* négative *est tout à fait normale*.Une élasticité égale à -2 signifie qu'une variation de *k% de* x, entraîne une variation de (- 2×k%) de y.
Mais l'EA ne donne pas le même résultat de A vers B, et de B vers A. Aussi utilise t'on la *variation moyenne entre A et B.*

SIGNIFICATION DU PASSAGE DE EA à EP

L'ARC (A,B) le long d'une droite est un segment *fini* de cette droite.par ex :la fonction de demande ***<u>x=f(px):</u>***



Le segment fini possède une limite lorsque en abscisse $\Delta x \rightarrow 0$. Cette limite est la dérivée en 1 point par ex **:C**

<u>Ecriture mathématique de l'EP au point C</u>

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{y/x} \text{ ou } [E(y)/E(x)] = \frac{\text{Variation INFINITESIMALE de l'ordonnée}}{\text{Variation INFINITESIMALE de l'abscisse}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{y/x} = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{y}}{\mathbf{d}\boldsymbol{x}} \times \frac{x}{y}$$

avec d*y*/d*x* *LA DERIVEE* de y = *f* (x) soit *y'*

$$= \mathbf{y'} \times \frac{x}{y}$$

Le résultat
Si la dérivée (*y'*), c'est-à-dire la *pente* est identique en tout point de la courbe, par contre le rapport (x/y) dans la formule est différent selon les points. Aussi la valeur de l'élasticité n'est-elle pas la même selon les points.
Ainsi l' *élasticité prix de la demande* négative peut varier de [0 ….à…..-∞].
Une élasticité égale à -2 signifie qu'une variation de *k% de* x, entraîne une variation de (- 2×k%) de y.

Au point (C) l'*élasticité d'arc devient* :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x/px} = \lim_{\Delta px \rightarrow 0} \frac{\Delta x/x}{\Delta px/px} \times \frac{x}{px}$$

C'est donc la limite du rapport des variations relatives, quand la variation du prix (px) tend vers 0, . C'est-à-dire l'importance des réactions de x à une **variation infiniment petite** du *prix (px)* ou de la variable explicative.

VI) Développement 1 de la théorie du comportement du consommateur *l'arbitrage « Travail-Loisir »*.

Après avoir démontré l'existence d'une fonction de demande individuelle issue des choix rationnels du consommateur, sur la base de ses préférences (sa fonction d'utilité –ordinale-), nous pouvons apporter un premier développement à cette théorie. En effet, nous avons jusqu'ici considéré le revenu « R » du consommateur comme donné ou comme *variable exogène* au modèle. Or nous pouvons endogénéiser cette variable, puisque la théorie marginaliste propose d'expliquer théoriquement, par la théorie des choix rationnel et la méthode de la maximisation sous contrainte, l'origine du revenu du consommateur ainsi que son importance telle qu'elle est souhaité par le consommateur. Ce versant de la théorie néo-classique est connu sous le nom d'***arbitrage « travail-loisir »*** et vise la construction de la ***fonction d'offre de travail*** individuelle. Pour éviter les explications théoriques trop longues nous le traiterons au moyen d'un exemple, dont la résolution repose sur une méthode devenue classique et adapté à tous les exercices portant sur ce sujet.

VI1) L'arbitrage « travail-loisir » : *les principes*

VI11) Le *travail* comme *« désutilité »*

La théorie néo-classique définit le *marché du travail* comme un lieu fictif de rencontre d'une **demande de travail** et d'une **offre de travail**. La demande de travail est le fait des *demandeurs*, c'est-à-dire les firmes placées en situation de CPP. Tandis que l'offre individuelle de travail est le fait des offreurs (aussi en CPP), c'est-à-dire des personnes désireuses *d'échanger une partie de leur temps contre une rémunération monétaire*, en exerçant une activité. Aussi le consommateur est-il simultanément un *offreur de travail*.

Mais son offre de travail est traitée de manière particulière. Le consommateur-travailleur est en effet considéré comme *détenteur d'un temps disponible* qu'il accepte ou non d'affecter à l'exercice d'une activité marchande, c'est-à-dire *au travail*.. Le travail est donc apparemment *un bien comme les autres* : échangé sur un marché, et soumis à un arbitrage individuel.

Toutefois, à la différence des autres biens, il est pour l'individu *une **désutilité**,* ou il est pour lui *source de désutilité*. La théorie marginaliste considère le consommateur-travailleur comme *détenteur* d'un *temps total* (journalier) *limité*. La journée ne peut excéder 24 heures. Par conséquent il doit *partager cette dotation totale* entre le *travail, et un autre bien* appelé **loisir**. C'est le loisir qui est source d'*utilité*, et c'est sur *la demande de loisir que toute l'attention de la théorie est portée*. C'est une fois le temps de loisir déterminé par le consommateur qu'est connu son temps disponible pour le travail. D'où le principe fondamental selon lequel l'offre de travail est *un « résidu »*. Elle est défini par ce temps qui reste une fois soustrait le temps de loisir du temps disponible total.

Cette précision essentielle étant faite, le modèle d'arbitrage « travail-loisir » se ramène ensuite à *la théorie des choix du consommateur*, puisqu'il s'agit bien ici d'un ***choix* entre deux biens** : **le travail (ou mieux le panier de biens que la rémunération monétaire permet d'acquérir), et le loisir,** dont la meilleure définition est *le temps de non-travail*.

VI12) La fonction d'utilité $\mathbf{U = \mathit{U}(\mathit{l}, \mathit{r})}$

Il n'est plus possible de considérer comme point de départ la fonction d'utilité U = *U*(x,y) telle qu'elle a été présentée plus haut.

Le revenu (noté *« r »*) est maintenant *endogène*, ou devient un argument de la fonction d'utilité. Son équation découle de sa définition : *« r »* est la rémunération de la partie du temps disponible que le consommateur consacre au travail. On peut donc définir : $r = wt$ avec *« w »* le salaire par unité de temps travaillé, et *« t »*, le temps consacré au travail.

Ce temps *« t »* est une portion du temps total « T » dont dispose le consommateur (T=24h dans une journée). Par conséquent *« r »* le revenu qui en est tiré ne peut croître indéfiniment sans que le consommateur en retire de l'insatisfaction. On considère, en appelant *« l »*, le temps de loisir, que le

consommateur accorde un privilège à ce *temps de satisfaction*, et établit sur cette base une balance entre *« l »* et *« t »*. *Cette double affectation du temps permet d'écrire* l'équation du temps de loisir : l = T – t ⇔ l = 24 – t si la durée T n'est pas précisée.
La fonction d'utilité traduisant l'arbitrage « travail-loisir », vient compléter la théorie du comportement du consommateur. En supposant donné « p » les prix de tous les biens, et le taux de salaire *« w »* (le prix du bien travail), on peut poser que la satisfaction est une fonction croissante du loisir (l) et du revenu *(r)*.

Elle s'écrit **U = *U*(*l, r*). Comme *l*= T – *t* et *r* = *wt*, on a en remplaçant :**

U = *U* (*T-l, wt*)

VI13) *L'optimum* et *la fonction d'offre de travail*

En appliquant la méthode de maximisation sous contrainte (r = wt ou contrainte **de « budget-temps »**), on démontre que *la satisfaction optimale* est obtenue pour un *temps optimal de travail* (t) vérifiant la relation (condition du premier ordre) :

$dU/dt = U'_t = 0 = - dU/dl + w(dU/dr)$ et donc

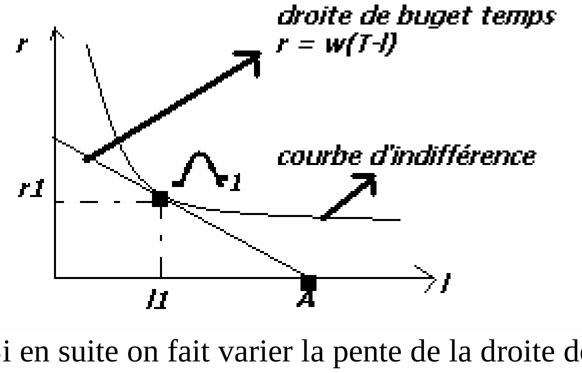
$$w = \frac{(dU/dl)}{(dU/dr)}$$

A l'optimum, le taux de salaire est égal au TMS du revenu au loisir

soit : $w = TMS_{r/l}$

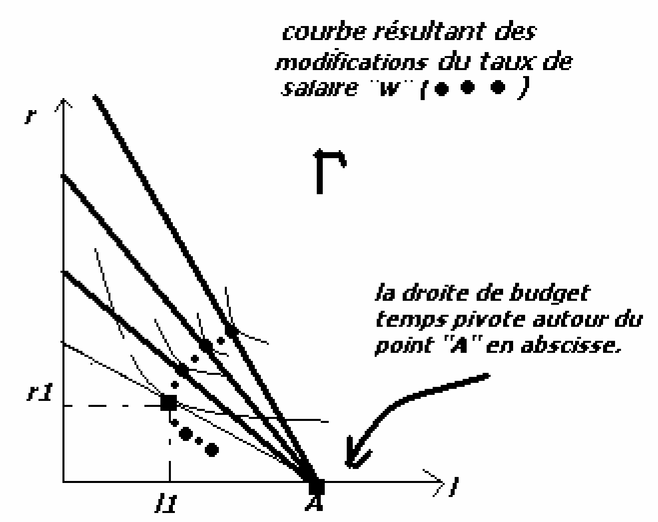
Par conséquent pour chaque taux de salaire *« w »*, un temps de travail *« «* , choisi par l'individu sur la base de ses préférences, existe. Sa fonction est fournie par la relation *« w »* ci-dessus, qui lie *« w »* et *« t»*. Il est donc possible d'en déduire *la fonction d'offre de travail par le consommateur-travailleur* : *t=t(w)* lorsque tous les autres prix sont fixés.

La fonction d'offre de travail individuelle : ***t=t(w)*** est une fonction particulière dite *« coudée »*.
On remarque tout d'abord que les préférences individuelles étant déterminantes, on ne peut rien affirmer *à priori* quant au sens de variation de la fonction. Par exemple une préférence affirmée pour le loisir peut se traduire par une pente négative pour certaines valeur de *« w »*.
On explique alors la courbe représentative par la maximisation sous contrainte, à laquelle on ajoute quelques hypothèses complémentaire.
Le programme du consommateur-travailleur s'écrit :
Max U= *U(l,r)*
Sc : r = w(T-l)
On sait que cela revient à chercher dans le plan (l0r), ***w* étant donné**, un point de tangence entre la droite de budget temps d'équation r = w(T-l) et une courbe d'indifférence. C'est-à-dire déterminer les coordonnées de l'optimum Ω_1 dans le graphique d'abscisse *(l)* et d'ordonnée *(r)*.

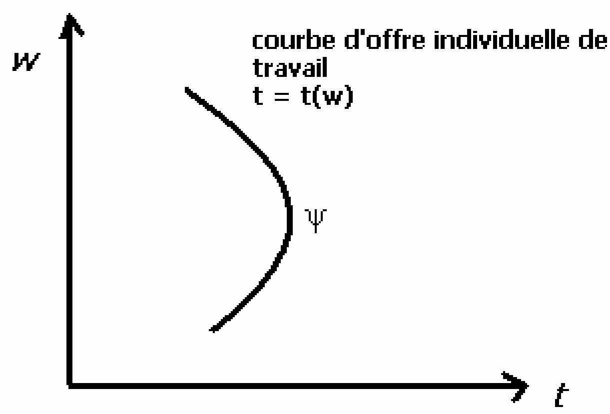


On lit que le consommateur atteint un optimum en Ω_1 (r_1,l_1, U*).
Il a donc réduit son temps de loisir à *l1*, pour consacrer un temps (T-l_1) = t_1 au travail et donc à l'obtention du revenu r_1 rémunéré au taux w donné.

Si en suite on fait varier la pente de la droite de budget temps, c'est-à-dire le taux w, alors la droite pivote autour du point A du graphique (A est tel que l= T et $r=0$, et signifie que tout le temps est alors consacré au loisir). En introduisant plusieurs pivotements successifs, les *optima* successifs décrivent alors une courbe (notée Γ). Cette courbe a la forme généralement admise ci-dessous :

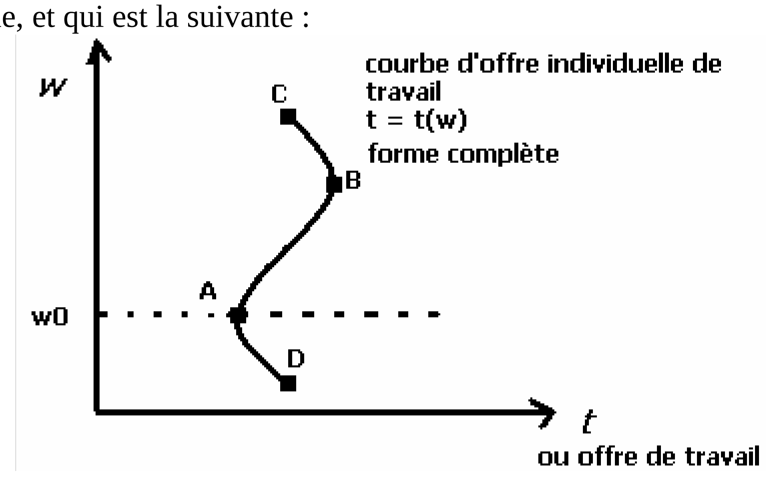


La courbe ci-dessus n'est pas celle de l'offre de travail. Elle est une relation entre *r* et *l*. Toutefois étant paramétrée par *« w »*, il est possible d'en déduire une autre courbe, celle de l'offre de travail (notée ψ), représentative de la relation entre *w* et *t* (avec *l*=Tl*)*. Soit la représentation suivante



Cette courbe traduit le fait constaté dans la représentation de la courbe Γ, que la pente de celle-ci (d*r*/d*l*) est positif à partir d'un certain niveau de salaire *w*. Ici elle est négative (*t décroît)* à partir d'un certain niveau de salaire.

En admettant quelques hypothèses complémentaires on obtient l'allure de la fonction d'offre de travail la plus classique, et qui est la suivante :



Les hypothèses admises concernent les points, et les intervalles qui les séparent :

w_0 est le seuil de subsistance, c'est-à-dire le niveau du salaire où commence l’offre de travail car il couvre exactement les coûts du travailleur consommateur,
[A➔B] l’offre augment à mesure de la croissance du salaire
[B➔C] l’offre de travail diminue à mesure de la croissance du salaire, manifestant la préférence du consommateur pour le loisir, et à l’inverse,
[A➔D] l’offre augmente du fait de la baisse du salaire, manifestant la préférence du consommateur pour le travail, dans le but de maintenir son revenu antérieur.

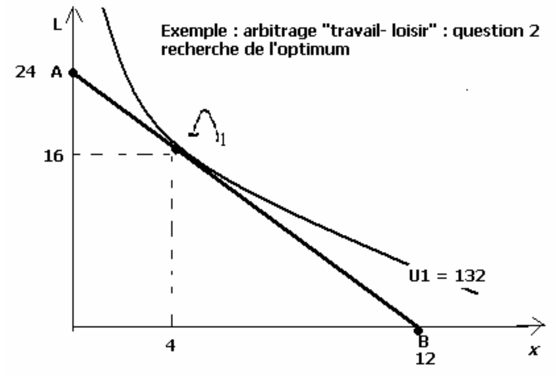
VI2) L’exemple de la fonction de préférence : U = L*x* + 4L + 4 = L (*x*+4) + 4 avec L le temps de loisir.

En appelant T, le temps consacré au travail, et L celui consacré au loisir, aucours d’une journée de 24h, on a T+L = 24.
On se propose
1) de formaliser l’équation de la contrainte de budget, en appelant *« s »* le salaire nominal *et* « *w* » = *s/p*, le salaire réel.
2) de déterminer le temps de travail optimal du consommateur lorsque « *w* = 0,5 ». Par hypothèse, on pose p=100, et donc *s* = *w*p et *w* = *s*/0,5.
3) de déterminer l’équation de la *courbe d’effet prix* ou ensemble des salaires réels optimaux quand varie le salaire réel *w*.
4) de déduire l’équation de la demande de loisir (L = L(w)) et celle de l’offre individuelle de travail (T = T(*w*)) dont on fournit une représentation.

1) Comme le montre l’équation *w = s/p, le salaire réel est le salaire nominal*, ou rémunération par unité de temps de travail effectivement perçue, pondéré par le prix du panier de biens qu’il permet d’acheter.
L’équation de la contrainte budgétaire est obtenue en passant de la contrainte de temps à son expression monétaire. On s’inspire pour cela de la contrainte du consommateur :
R = x*px* + y*py*. Elle montre que le revenu (R) est égal à la dépense totale du consommateur.
On retrouve pareille équation en posant les identités suivantes :
R = r = 24×*s* ➔ s’il consacre tout son temps au travail, le consommateur peut au maximum obtenir un revenu potentiel égal à 24 fois la rémunération horaire.
La dépense totale du consommateur est nécessairement composée de biens (pour la subsistance ou plus). Il achète pour cela une quantité de biens notée *« x »* au prix du marché *« p »*. Cette dépense s’écrit : p*x* = dépenses en X, le panier de biens.
Il peut cependant ne pas consacrer l’intégralité du revenu *r* à l’achat de bien. Dans ce cas il économise du temps, qu’il consacre au loisir. Cette économie de temps représente *le prix du loisir*, et se mesure par la *renonciation à la rémunération horaire (s) pondérée par le temps concédé au loisir* (L). L’achat de loisir peut donc s’écrire : L*s*. Cette dépense est aussi appelé *le coût d’opportunité du loisir*, signifiant par là qu’il n’est pas gratuit puisqu’il exige la renonciation à un autre bien (ici la dépense *px*).
Au total, l’équation de la contrainte budgétaire est :
24*s* = p*x* + L*s*
Dans le plan (*l*0*w*)*, en passant «* L » à gauche, elle devient :
L = -(p/*s*)×*x* + 24 = -L/*w* + 24
On pouvait la déduire sous cette forme plus rapidement, sachant que T + L = 24 est la contrainte de temps.
En absence d’épargne, la dépense totale maximale d’une période est nécessairement égale au revenu total du travail, soit :
P*x* = *s*T on peut en déduire T = (p/*s*)*x*
En remplaçant T dans la contrainte, on a : T +L = (p/*s*)*x* = 24. Ce qui permet en passant L à gauche de retrouver l’équation : **L = -(p/*s*)×*x* + 24 = -1//*w* ×*x* + 24 (puisque *w* = *s*/p).**

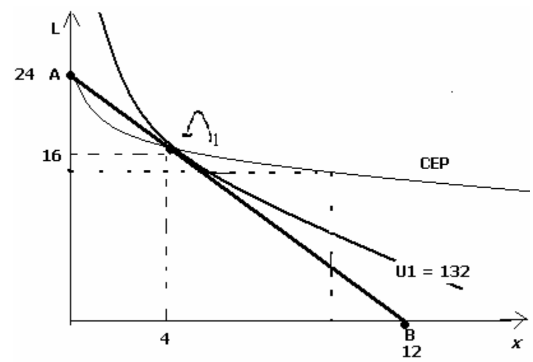
2) On applique la méthode de maximisation à L et *x*, les quantités consommées de biens « L » et « *x* ».

La contrainte de budget et sa représentation géométrique : Elle s'écrit puisque $w = 0,5$, en remplaçant dans l'équation générale : $L = (-1/0,5)x + 24 = -2x + 24$. Sa représentation appelée AB est classique.
S'il renonce au travail, il consomme au maximum selon l'équation de la contrainte : L = -2x +24 et si (-2x = 0) alors L = 24. C'est le point A en ordonnée du graphique.
S'il renonce au loisir, la contrainte s'écrit : $-2x + 24 = 0$ ➔ $x = 12$. C'est le point B en abscisse du graphique.
Par hypothèse, puisque p=100, et que le consommateur dépense alors (x.p) ⇔ 12×100 = 1200, on en déduit que ceci est équivalent (24×100)/0,5 = 1200 soit $(T \times p)/w$, et donc la quantité de biens x= 1200/100.
Au total, les points de rencontre avec les axes sont (A,B) = (24,12). La recherche algébrique de l'optimum peut être réalisée selon la méthode du remplacement, en portant l'équation de la contrainte budgétaire dans l'équation de la carte d'indifférence (U).
Soit $U = Lx + 4L + 4 = L(x+4) + 4$, et comme $L = -2x + 24$, alors : $U = -2x^2 + 16x + 100$.
Cette fonction admet un extremum lorsque sa dérivée première est nulle ($dU/dx = 0$) ; cet extremum est un maximum lorsque sa dérivée seconde est négative ($d^2U/dx^2 = 0$).
$dU/dx = -4x + 16 = 0$ pour $x = 4$, alors $L = 24 - 2x = 16$ et $T = 8$ ainsi que $U = U_1 = 132$.
La dérivée seconde est bien négative = -4. L'optimum de satisfaction est atteint au point de tangence
Ω_1 (U_1, L, x) = (132, 24, 4).



4) On adopte la méthode vue pour les biens x et y. La fonction d'utilité doit préalablement être transformée en équation générale des courbes d'indifférence.
Soit $U = L(x+4)+4$ d'où $L = (U/x+4) - 4$.

On recherche ensuite l'équation générale du $TMS_{L/x} = -dL/dx = L / x+4$
On sait qu'à l'optimum le TMS = le rapport des prix, soit :
$L/x+4 = p/s = 1/w$
Cette expression peut être remplacée dans la contrainte de budget. Tous les optima doivent donc vérifier l'égalité :
Ancienne contrainte $L = -(1/w)x + 24$ en remplaçant (1/w) par (L/x+4) elle devient :
$(L/x+4) \times x + 24$. Soit alors $L = -(1/w)x + 24 = -(L/x+4) \times x + 24$
En changeant de membre on en déduit l'équation d'*effet prix*, représentée dans le plan (L0x)
$L = (12x + 48)/x+2 = 12 + (24/x+2)$
On retrouve évidemment l'optimumΩ_1 pour x=4 alors L = 16.
La courbe d'effet prix a alors l'allure suivante :



5) De même que nous déduisions la fonction de demande d'un bien, à partir de la CEP, il est possible ici également de déduire la fonction de demande de loisir L = *L*(*w*) et celle nécessaire pour construire la courbe d'offre de travail, la fonction d'*offre de travail* T = *T*(*w*).

De l'égalité TMS = le rapport des prix, soit : L/x+4 = p/*s* = 1/*w*, on déduit *x* = L×*w* – 4

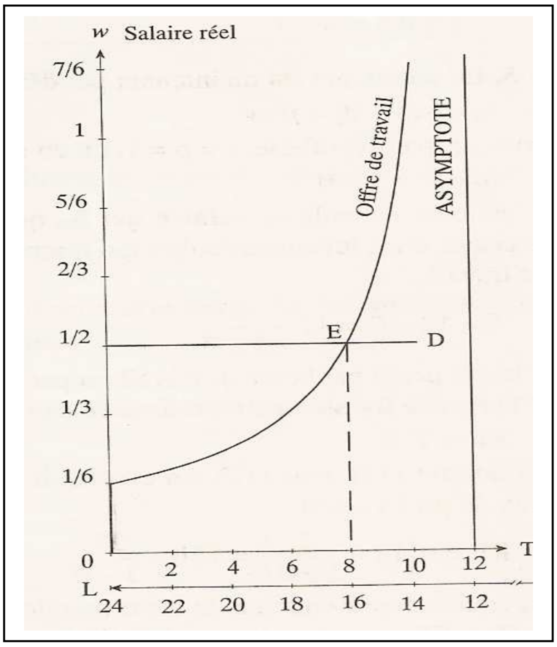
Connaissant l'équation générale de la contrainte L = -(1/*w*)*x* +24, on peut remplacer *x* = L×*w* – 4, pour obtenir : L = -(1/*w*)×(L*w*-4) + 24 = -L +(4/*w*) +24

L'équation de la demande de loisir est alors : **L = (2/*w*) + 12**, et comme T = 24 – L, alors l'équation de l'offre de travail est : **T = 12 – (2/*w*).**

Représentation graphique

C'est l'équation d'une branche d'hyperbole tournant sa concavité vers la gauche (voir figure 7), d'asymptote T = 12, et qui coupe l'axe des prix réels à l'ordonnée 1/6.

Notons que, à partir du point où l'offre de travail s'annule, c'est-à-dire en dessous de $w = 1/6$, la courbe d'offre est confondue avec l'axe des ordonnées. Toute la journée est consacrée au loisir (L = 24) et le consommateur atteint un niveau d'utilité U = 100. On peut en conclure que la consommation du bien X n'est pas absolument indispensable au consommateur.



Graphiquement, sur la figure 6, on constate que, pour tout prix réel $0 < w < 1/6$, on se trouve en présence d'une solution « en coin », avec optimum fixé au point A.

On remarque que, compte tenu de la relation évidente unissant dans tous les cas L et T (T = 24 – L), il est inutile de construire deux graphiques différents pour la demande de loisir et pour l'offre de travail. Un procédé graphique très simple permet de les représenter par une seule et même courbe, en retenant pour axe des abscisses la valeur de T, croissant de gauche à droite, et en lui adjoignant juste en dessous, avec les mêmes échelles, une demi-droite représentant les valeurs de L correspondantes, croissant de droite à gauche, depuis L = 0 pour T = 24 jusqu'à L = 24 pour T = 0 (voir figure 7).

Dans cet exercice, il n'est pas besoin de faire varier T jusqu'à 24, puisque l'on constate que l'offre de travail ne dépasse jamais 12 heures (abscisse de l'asymptote), quel que soit le niveau du salaire réel.

Remarque : On pourrait aborder ce problème sous un autre angle en envisageant le choix du consommateur, non entre un bien et le loisir, mais entre le loisir (L) et le revenu monétaire du travail (R = $s \cdot$T).

Le principe d'optimisation est similaire, le prix relatif de travail ($w = s$/p) étant interprété comme le rapport entre un indice de salaire et un indice de prix des biens de consommation. On maximise dans ce cas : U = U(R, L), sous la contrainte :

T = R/*s* = 24 – L

(extrait du manuel)

VII) Développement 2 de la théorie du comportement du consommateur : La consommation sur plusieurs périodes et la possibilité de l'épargne et de l'emprunt : *les choix intertemporels du consommateur*

VII1) Définitions des chois intertemporels

En étudiant les choix du consommateur nous avons exposé l'essentiel du modèle de base, dit *walrassien* et *marshallien*. De nombreux raffinements lui ont été apporté pour réduire les insuffisances. Manifestement, le point faible principal est le *caractère unipériodique* de l'analyse.
Nous avons fait comme si tous les arbitrages du consommateur étaient réalisés dans une même période de temps. Nous avons gommé de la sorte le fait que le consommateur, comme tous les autres agents économiques, essaie toujours *d'anticiper sa situation pour maximiser sa satisfaction*, et ceci sur la plus longue période possible. Un exemple évident est son comportement d'épargne et d'emprunt, qui le situe en longue ou moyenne période.
En cherchant à combler cette insuffisance, nous pénétrons dans l'analyse dite des ***équilibres non walrassiens,*** et donc celle ***des choix intertemporels..*** Cette analyse (micro et aussi macroéconomique), dont l'épicentre est le concept **d'anticipations**, a constitué une véritable révolution dans la pensée néo-classique, ceci dès le début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, pour se prolonger notamment chez M. Friedman. On la retrouve dans l'un des courants récents de la pensée néo-classique sous l'expression de « *Théorie du déséquilibre* ». Un exposé didactique se trouve dans : Antoine d'Autumne : *« Monnaie, croissance et déséquilibre »* (Economica, 1985).
En guise d'introduction simplifiée à ce développement de la théorie du consommateur, nous étudions par l'exemple les comportements de choix du consommateur dans un horizon limité à deux périodes.
La question générale à laquelle nous répondons est : *comment le consommateur maximise t'il sous contrainte sa satisfaction lorsque disposant d'un revenu, il anticipe ses dépenses de consommation en ayant la possibilité d'épargner et d'emprunter, sur plusieurs périodes (ici : deux)* ?

VII2) La maximisation de la satisfaction dans un horizon de deux périodes : Etude d'un exemple.

Le consommateur est dans cet exemple (fictif) un salarié, dont le contrat de travail sur deux années prévoit les conditions ci-dessous :

Périodes	**Nature du contrat**	**Montant de la rémunération : R**
Année 1	Travail posté Durée hebdomadaire importante	R1 = 160 K€/an (milliers d'€)
Année 2	Travail à tiers temps	R2 = 42,4 K€/an (ibid)

Par hypothèse :
- Les prix sont stables sur les deux années
- Le consommateur ne prend ses décisions d'épargne et d'emprunt que sur les deux ans
- Le consommateur n'a en fin des deux périodes aucune épargne, et aucun crédit.

Le but de l'exercice : En nommant C_1 et C_2 ses consommations successives, on essaie de déterminer comment il répartit celles-ci sur les deux années, afin de maximiser sa satisfaction <u>totale</u> obtenue pendant les deux années.

Les questions :

1- L'hypothèse de départ est que le consommateur consomme chaque année exactement ce qu'il gagne. Placer alors le point A, représentatif de la première combinaison , dans un graphique d'abscisse C_1 et d'ordonnée C_2. L'échelle peut se limiter à [0-220 K€].

2- On suppose que le *taux de l'intérêt* est nul *(i=0).*

2a) Quelles combinaisons possibles de C_1 et C_2, le consommateur peut-il atteindre compte tenu de son revenu ?

2b) L'ensemble de ces combinaisons pouvant être alignées le long d'une courbe, donner *l'équation de cette courbe*.

3- On suppose que le taux de l'intérêt *i=6%/an*. Le consommateur dispose donc de possibilité de placement de son revenu dès la première année. Son épargne est donc susceptible d'accroitre le revenu de la seconde année. La consommation peut s'en trouver modifier, et être plus importante la seconde année.

Déterminer alors l'ensemble des combinaisons de consommation réalisables dans cette nouvelle hypothèse. Tracer la courbe représentative sur le même graphique.

4- Jusqu'ici nous ignorons le niveau de satisfaction atteint suivant ces différentes combinaisons. Or, nous savons qu'il s'agit d'un critère de choix important. Aussi, faut-il confronter maintenant ce critère avec *la « préférence pour le temps »* du consommateur que nous venons d'identifier. Plus simplement, il faut prendre en considération *sa carte d'indifférence*, celle qui donne *la répartition intertemporelle des consommations considérées par lui comme équivalentes*.
On appelle ces nouvelle carte d'indifférence, **la *carte intertemporelle d'indifférence*.** Elle est la suivante :
$U = (C_1 \times C_2)/106$

4a) *Représenter les courbes de niveau* $U_1 = 64$ et $U_2 = 100$. *Interprétez la forme de ces courbes.*
4b) Déterminer la répartition optimale des consommations C_1 et C_2, *lorsque i=6%/an*.
4c) Comparez par rapport aux hypothèses antérieures.

Réponses aux questions :

1- L'hypothèse de départ est que le consommateur consomme chaque année exactement ce qu'il gagne. Placer alors le point A, représentatif de la première combinaison , dans un graphique d'abscisse C_1 et d'ordonnée C_2. L'échelle peut se limiter à [0-220 K€].

Suivant l'énoncé, les consommations C_1 et C_2 sont égales au revenu respectif R_1 et R_2, soit :
$C_1 = R_1 = 160$ K€ ➔ abscisse du point (A)
$C_2 = R_2 = 42{,}4$ K€ ➔ ordonnée du point (A)

2- On suppose que le taux de l'intérêt est nul (i=0).
2a) Quelles combinaisons possibles de C_1 et C_2, le consommateur peut-il atteindre compte tenu de son revenu ?

L'hypothèse d'un taux d'intérêt nul est importante car elle signifie que le consommateur ne peut pas considérer l'épargne de son revenu comme une alternative à la consommation. N'ayant pas à faire d'économies, il peut consommer en respectant *sur les deux ans*, l'égalité de son revenu et de sa dépense, soit :

$$C_1 + C_2 = R_1 + R_2 = 160 + 42{,}4 = 202{,}4 \text{ K€}.$$

2b) *L'ensemble de ces combinaisons pouvant être alignées le long d'une courbe, donner l'équation de cette courbe*.

La courbe en question est une droite, **celle de la contrainte de budget**. Nous savons qu'elle s'écrit en règle générale :

$C_2 = f\ (C_1)$, qui signifie que la dépense totale en C_2 est fonction de la dépense totale en C_1.

L'équation se déduit aisément de la précédente (2_b), puisque $C_1 + C_2 = R_1 + R_2$, alors

$C_2 = – C_1 + (R_1 + R_2) = - C_1 + (160 + 42,4) = - C_1 + 202,4$ K€.

$C_2 = - C_1 + 202,4$ doit figurer dans le graphique. On remarque

- d'abord que cette droite est toujours de pente = -1 *lorsque le taux d'intérêt est nul*
- puis, que l'ordonnée à l'origine est 202,4 soit ($R_1 + R_2$). On note (M) ce point, qui signifie que si le consommateur s'abstient de consommer en année 1 ($C_1 = 0$), alors il pourrait consommer 202,4 en année 2.
- Enfin et de manière symétrique, que l'abscisse à l'origine est aussi 202,4. On note (N) ce point, qui a le même sens que (M) mutatis mutandis.

Le tracé de la droite permet de voir que le point A, vérifie la contrainte. (voir ma figure).

3- *On suppose que le taux de l'intérêt i=6%/an… Déterminer alors l'ensemble des combinaisons de consommation réalisables dans cette nouvelle hypothèse. Tracer la courbe représentative sur le même graphique*.

Un taux d'intérêt non nul entraîne une épargne qui grossit le revenu en année 2. Quel est alors le montant épargné la première année, et quelle sera la croissance consécutive du revenu la seconde année ?

Le montant épargné ou $E_1 = R_1 – C_1$, soit Revenu – part destinée à la consommation en année 1.

L'intérêt perçu la seconde année s'écrit si le taux d'intérêt est *(i) :* $E_1 \times i$. *Comme* $E_1 = R_1 – C_1$, en remplaçant on obtient : $E_1 \times i = (R_1 – C_1) \times i$. Cette équation donne la croissance du revenu.

Par conséquent sur les deux années le revenu total noté R* est de :

$R^* = R_1 + R_2 + [(R_1 – C_1) \times i.]$

L'ensemble des combinaisons optimales respecte la contrainte. Quelle est-elle ?

Le consommateur doit équilibrer sur les deux années sa dépense et son revenu total. Ce qui s'écrit : $R_1 + R_2 + [(R_1 – C_1) \times i.] = C_1 + C_2$

Elle devient sous la forme $C_2 = f\,(C_1)$: $C_2 = - (1+i)\ C_1 + (1+i)\ R_1 + R_2$ et en donnant leurs valeurs à R et à *i* on obtient : **$C_2 = - 1,06\ C_1 + 212$** . Pour la représentation graphique, on note que :

- Le point (A) précédent, obtenu en l'absence d'épargne, respecte cette contrainte
- L'ordonnée à l'origine est RT* = 212. On note (M*) ce point qui s'interprète comme (M).
- Symétriquement, l'abscisse à l'origine est 200 et non 212. On explique ce résultat de la manière suivante. La croissance du revenu en année 2, est le résultat d'une épargne en année 1. Or le consommateur aurait pu se comporter différemment en acceptant de ne rien consommer en année 2. Dans ce cas, le revenu R_2 aurait pu être consommé en année une. Ce revenu d'un montant R_2 = 42,4 n'a pas cette valeur en année une, cependant. La valeur de R_2 en année une est obtenue en *actualisant par le taux de l'intérêt la somme de 42,4.* Cette valeur est appelé en maths fi *«valeur actuelle » ou VA.* Comme il s'agit du revenu R_2 on note **$VA(R_2) = R_2 / (1+i)$ soit 42,4/1,06 = 40**.

S'il s'abstient de consommer en R_2, le consommateur peut réaliser une dépense totale de consommation égale à : R_1 = 160 + 40 = 200. On note (N*) ce point d'abscisse.

Après avoir représenté la nouvelle droite de budget, on note en conclusion qu'il s'agit de la droite « classique », mais dans un contexte intertemporel. En effet, la pente de la droite de budget dépend ici du taux de l'intérêt *i*.

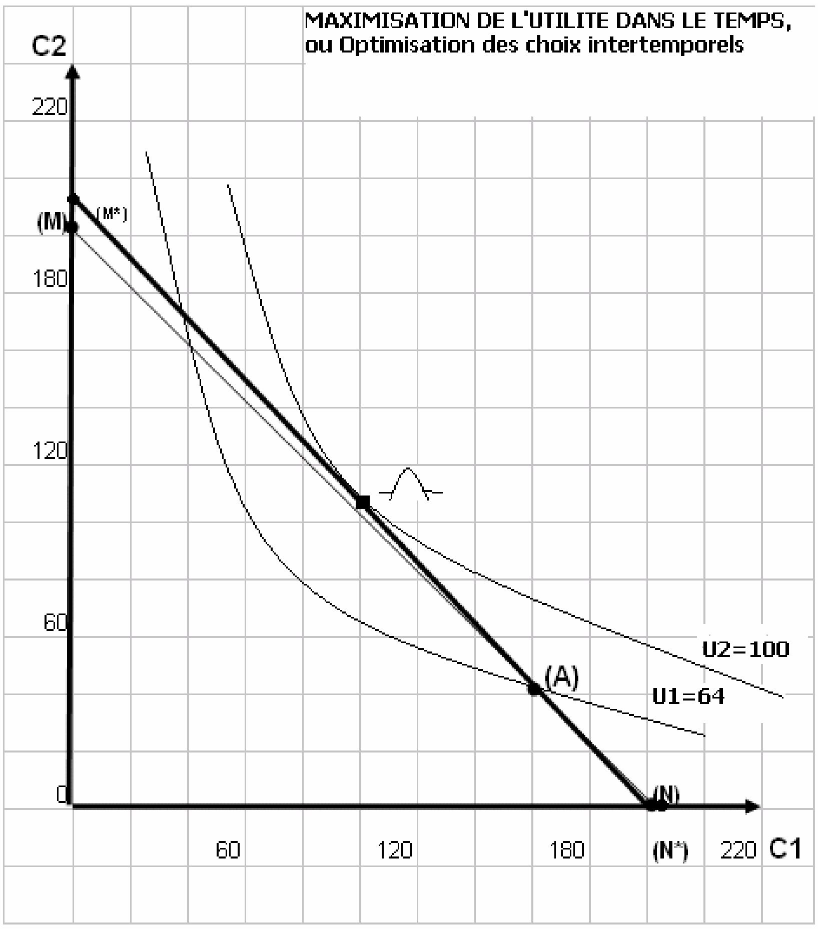
4- Soit la *carte intertemporelle d'indifférence* : $U = (C_1 \times C_2)/106$

4a) *Représenter les courbes de niveau* $U^0_1 = 64$ et $U_2 = 100$. *Interprétez la forme de ces courbes*.

Il suffit dans l'équation de la carte de remplacer U par les valeurs 64, puis 100, et d'exprimer C_2 en fonction de C_1, pour obtenir l'équation des deux courbes de niveau ou d'indifférence temporelles (année une, puis année deux).
Les courbes U_1 et U_2 représentent l'ensemble des combinaisons apportant le même niveau de satisfaction. Un même niveau de satisfaction signifie que le consommateur accepte des substitutions entre les deux années ; il est indifférent à consommer en année une ou en année 2.

On représente graphiquement U_1 ert U_2 à partir des équations suivantes pour U constant égal à U* :
De $U = U(C_1 \times C_2) = C_1 \times C_2 /106$, on isole successivement les fonctions $(1/C_2)$ et $(1/C_1)$ à partir de : $U^* = C_1 \times C_2 /106 \Rightarrow U^*/(C_1 \times C_2) = 1/106$ d'où $1/(106 \times U^*) = 1/(C_1 \times C_2)$. En isolant et en donnant ses valeurs à U* , on obtient :
$1/C_2 = C_1/6784$ pour $U^*=64$ et $1/C_2 = C_1/10600$ pour $U^* =$ 100 .
Par exemple : pour $C_1 = 160$, on obtient sur $U^*= U_1 = 64$, $1/C_2 = 0{,}0235$ soit en inversant $C_2= 42{,}4$. on retrouve ici les coordonnées du point A (question 1).
De même on obtient pour $C_1 = 160$, sur $U^*= U_2= 100$, $1/C_2 = 0{,}01509$ soit en inversant $C_2= 66{,}25$.

➔ Voir le graphique (dont l'échelle est approximative).



L’interprétation de ces deux courbes repose sur *leur pente*. On sait que la pente de la tangente en un point d’une courbe d’indifférence est le TMS. C’est le cas ici, où par exemple la pente de la tangente à la courbe U_1 s’écrit : $-(dC_1/dC_2)_{U1.}$ Elle mesure le taux de substitution intertemporel (ou TSI).
Le TSI entre C_1 et C_2 est *le multiplicateur qu’il faut appliquer à C_2 pour compenser la réduction de la consommation en C_1, tout en maintenant le même niveau de satisfaction*.
De cette définition il ressort que si le consommateur était indifférent à consommer en année une ou en année deux, le TSI serait toujours égal à -1. Or, les courbes d’indifférence tournent leur concavité vers le haut, et ne sont donc pas des droites. Ce phénomène traduit ***la préférence pour le présent (versus dépréciation du futur), laquelle entraîne des valeurs du TSI >1, et d’autant plus importantes que C_1 est faible (la pente est plus forte à gauche)***.

Du TSI on peut déduire le **tpT** ou *taux de préférence pour le temps*, ou encore *« taux d’escompte psychologique du consommateur »*, avec :

$$tpT = |TSI| - 1$$

Il sert à l’interprétation. Ainsi, lorsque en un point on a , par exemple TSI = -1,20, cela veut dire que le consommateur réclame une *« prime* (pour le temps) » égale à 20, pour reporter une dépense de 100 de l’année 1 à l’année 2.
On peut démontrer qu’à l’équilibre, ou optimum, est vérifiée l’égalité entre *le taux de préférence pour le temps*, et *le taux de l’intérêt*, soit :
A l’optimum : ***tpT = i***

4b) Déterminer la répartition optimale des consommations C_1 et C_2, lorsque i=6%/an.

Déterminer l’optimum c’est maximiser sous contrainte. On adopte la méthode simple dite du remplacement.
On porte pour cela la contrainte $C_2 = -1{,}06C_1 + 212$ dans la fonction d’utilité $U = (C_1/C_2)/106$ pour maximiser $U = -0{,}01C_1^2 + 2C_1$. Cette nouvelle fonction admet un extremum au point où sa dérivée est nulle, soit : $dU/dC_1 = -0{,}02C_1 + 2 = 0$. Cette condition du premier ordre est vérifiée pour $C_1= 100$, $C_2= -1{,}06C_1 + 212 = 106$, et alors $U=U^*= 100$.
L’extremum est un maximum si la fonction vérifie la condition du second ordre, soit : $d^2U/dC_1^2 <0$. Ce qui est vrai puisque $d^2U/dC_1^2 = -0{,}02 < 0$.
Le Maximum ou *optimum est donc* **Ω (U, C_1, C_2) = Ω (100, 100, 106).**

4c) Comparez par rapport aux hypothèses antérieures.

Il y a deux autres cas : celui du point A déterminé plus haut, et celui non encore envisagé, mais suggéré
.-Au point A, nous supposions que le revenu de l’année courante était consommé. Les coordonnées correspondant au choix du consommateur étaient alors : A (C_1= 160, C_2=42,4 , U=64).

- Mais le consommateur peut aussi décider de *répartir au mieux ses consommations entre les deux années, sachant que le taux d’intérêt **i=0***. Quel serait alors l’optimum ?
  Nous connaissons la contrainte : $C_2 = -C_1 + 202{,}4$ (question 2b).
  En remplaçant dans la fonction d’utilité on obtient la nouvelle fonction :
  $U = -(1/106)C_1^2 + (202{,}4/106)C_1$
  La condition du premier ordre est : $dU/dC_1 = -(2/106)C_1 + (202{,}4/106) = 0$. Elle est vérifiée pour $C_1=C_2= 101{,}2$ et alors $U \approx 96{,}6$.

La fonction vérifie aussi la condition du second ordre puisque sa dérivée seconde est $-(2/106) <0$.
On ne représente pas ce niveau d’utilité.

Conclusion Générale sur la TNC_C

1) L'enrichissement de l'univers des choix.

En raisonnant comme précédemment à l'horizon de deux périodes, le modèle des choix intertemporels est évidemment plus riche que la présentation qui vient d'en être faite.
Il ressort de la présentation proposée par A. d'Autumne (op.cit.) que la maximisation sous contrainte prend la forme du programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } U(Q_1, Q_2, M_1/P_1, M_2/P_2) \\ \text{Sc : } P_1Q_1 + M_1 + sB_1 = w_1L_1 + \pi_1 + M_0 \\ \text{Avec } M_1 \geqslant 0 \text{ et } M_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Les variables du programme désignent respectivement :
Q_1 et Q_2 = l'équivalent de C_1 et C_2 = consommation aux deux périodes
L_1 et L_2 = les offres de travail
π_1 et π_2 = les dividendes reçus (des placements en titres boursiers)
M_1 et M_2 = les encaisses nominales ou *monnaie liquide*
Le consommateur peut de plus *acheter* ($B_1 > 0$) ou *vendre* ($B_1 < 0$) des titres à un ***prix actualisé***

$$s = \frac{1}{1 + i_1}$$

Enfin, le consommateur *anticipe* w_2 et P_2, c'est-à-dire les niveaux de salaire et les prix de la période 2, ainsi que les dividendes π_2. Ces variables sont supposées *exogènes* et donc données et non déterminées par le modèle.

La solution du programme de maximisation consiste à simplifier la contrainte pour l'écrire sous une forme unique :
$P_1Q_1 + sP_2Q_2 + (1-s)M_1 + sM_2 = w_1L_1 + sw_2L_2 + \pi_1 + s\,\pi_2 + M_0$
Ecriture qui montre sur les deux années la *dépense totale* (membre de gauche) égale la somme des revenus perçue ou *Revenu total* (noté R).
C'est la présence de la variable *« s »* qui témoigne de l'*actualisation*. Cette variable est en effet *le coût d'opportunité de la détention de monnaie liquide*. Par hypothèse ce coût est sensiblement égal à *s* en période 2, et égal à ($1-s \approx i$) en période 1.
Le résultat de la maximisation donne alors une demande de consommation dépendante des prix relatifs, et du revenu (R) réel exogène., soit :
$Q_1 (s, P_2/P_1, R/P_1)$
Un tel modèle à choix étendus montre pour reprendre les mots de l'auteur ***« l'importance cruciale des anticipations »***. Celles-ci renvoient à l'importance de *l'horizon temporel* du consommateur. Ainsi, sur un horizon temporel assez long, le consommateur raisonne plutôt en terme de *« patrimoine »* ou de *« revenu permanent »*. Il n'est pas alors conduit à modifier fondamentalement sa consommation. s'il anticipe par exemple un risque de chômage de courte durée. Néanmoins il peut aussi anticiper de manière pessimiste. Dans ce cas l'impact peut être plus grand, et le consommateur peut dans ce cas porter sa propension à consommer (=dépenses de consommation/revenu) à un niveau supérieur à 1, et donc s'endetter.
Les variables que nous venons de passer en revue, dont certaines sont exogènes, n'épuisent pas le modèle puisque d'autres versions font apparaître *les transferts monétaires de l'Etat* au consommateur, ainsi que la dissociation réalisée par le consommateur entre décision d'épargne (% constant du revenu) et choix de portefeuille (choix entre monnaie et titre).

2) D'autres développements du modèle : l'approche de K Lancaster ; décisions et choix en avenir incertain.

Si les choix intertemporels (donc *les anticipations)* et l'offre de travail, constituent assurément le développement le plus significatif, la période contemporaine a été marquée par d'autres raffinements. Citons sans explicitations :

- L’approche de Lancaster : *« A new approach to consumer theory’* –JPE- 1966. L’auteur redéfinit la source de l’utilité de l’approche traditionnel. Trois différences sont importantes :
  a) ce sont les caractéristiques des biens qui fournissent de l’utilité et non les biens eux-mêmes
  b) un bien possède plusieurs caractéristiques, et celles-ci peuvent êtres partagées par plusieurs biens.
  c) les comportements des individus prennent en compte les caractéristiques d’un bien et non les caractéristiques des différents biens. Par exemple, le bien *logement* est estimé suivant : l’emplacement, le confort, le nombre de pièces, la surface etc….

On reconnaît à cette approche l’intérêt d’expliquer pour quoi un bien cesse d’être complètement consommé. D’où son succès en *marketing*, et aussi en économie internationale dans le commerce intra-branche.

- L’analyse traditionnelle gomme le principe de ***décision en avenir incertain,*** et donc l’incertitude. Le renouvellement de l’analyse consiste à raisonner dans un futur probabilisé selon deux résultats : vrai ou faux. Le problème sous-jacent est ancien (Bernoulli-1732), et repris en 1944 par Von-Neumann et Morgenstern. Ces derniers ont proposé une fonction d’utilité soumise à trois cas *: il y a aversion pour le risque,* ou *préférence pour le risque,* ou enfin *indifférence au risque*. Les auteurs Friedman et Savage, donnent (1948) une autre version de la fonction faisant ressortir l’essentiel de la maximisation de l’utilité en *avenir incertain* : le critère pertinent du choix est *la maximisation de l’espérance d’utilité*

-Ж-