Rachid FOUDI

ANNEE UNIVERSITAIRE 2015-2016

INSTITUT DE SCIENCES ECONOMIQUES ET DU MANAGEMENT

UFR DE MATHEMATIQUES

MASS *LICENCE L2*

SEMESTRE S3

≈

MICROECONOMIE 1

DOCUMENT POUR LE COURS ET LES TRAVAUX DIRIGES

≈

RAPPELS DE MATHEMATIQUES

Partie 1 : généralités ***Partie 2 : optimisation***

Une bibliographie est donnée en fin de document

Elle complète celle du cours

MICROECONOMIE
Document de cours
RAPPELS DE MATHEMATIQUES
Partie 1 : généralités ***Partie 2 : optimisation***

Partie 1 : généralités

Dérivée et différentielle
Nombre dérivé (A)
Fonction dérivée (f'_{x0})
Fonction linéaire tangente à *f*
Fonction affine tangente à *f*
Graphique de la fonction et de sa dérivée
Théorème de la valeur approchée et graphique de la différentielle
Modes de calcul de la dérivée (exemples)
Dérivée d'une fonction composée
Généralités sur les fonctions (Monotonie, Continuité, Convexité)

Principales règles de dérivation

Les puissances

Les déterminants

Dérivées partielles et différentielle totale

Optimisation : méthode du multiplicateur de Lagrange
Théorème de Kuhn – Tucker
Développements de la méthode du multiplicateur de Lagrange
Théorème des fonctions implicites

Dérivation ou *différentiation* en un point x_0 :
Nombre dérivé (A)
Soit l'intervalle I tel que $]\ldots x_0 \ldots[$
Si existe $A \neq x$ et existe $\theta(x)$ une application de I dans R
Si existe $x \in I$, alors : $f(x) = f(x_0) + A\,(x-x_0) + \theta\,(x-x_0)$ et $\lim \theta(x)(\text{qd}x \rightarrow x_0) = 0$
Ou si $x = x_0 + h$ ($x_0 + h \in I$) avec h l'application linéaire tangente,
Alors $f(x_0+h) = f(x_0) + A\,h + h\,\theta(x_0 + h)$
et $\lim \theta(x_0 + h)$ (qd $h \rightarrow 0$) = 0
A est appelé *nombre dérivé*, ou *dérivée de (f)* au point x_0.
La dérivée est notée f'_{x0} ou si $y = f(x)$, notée y'_0
Remarque : $\theta(x)$ pour x=0 ou $\theta(x_0 + h)$ pour h=0 ont une valeur conventionnellement égale à 0, de sorte que la fonction θ soit continue en x_0, sinon leur valeur est indéterminée (par exemple si h=0 le terme $\theta(x_0 + h)$ peut prendre n'importe quelle valeur).

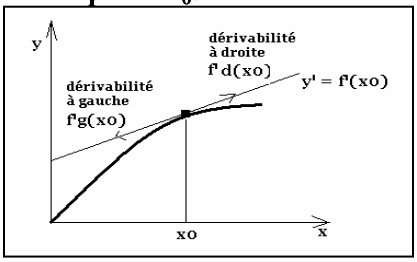
Dérivation ou *différentiation* en un point x_0 :
Nombre dérivé (A) – Autre définition
f est dérivable en x_0 si existe A tel que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)} \qquad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = A$$

application de I dans R — application linéaire tangente

L'application linéaire tangente à *f* en x_0 ou h
Est une application de R dans R, telle que :
$h \longrightarrow Ah$ (nombre dérivé) ou $h \longrightarrow f'x_0 \times h$ (fonction dérivée)
Cette application linéaire est appelée différentielle de la fonction h au point $\mathbf{x_0}$**. Elle est notée**

$$\mathbf{d}f\mathbf{x_0\,(h) \;=\; }f'\mathbf{x_0 \times h}$$



Fonction affine tangente à *f* en x_0, de type $y = ax$ ou $\varphi(x)$
$\varphi(x) = f(x_0) + A\,(x-x_0)$ ou $f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)$

➔ Théorème : *toute fonction dérivable en x_0* est continue en ce point

La fonction f n'est dérivable en x_0 que si elle est dérivable à gauche et à droite. Si elle vérifie $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

La fonction f admet en x_0 une dérivée infinie, si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\underbrace{(x_0+h) - x_0}_{= h}} = \infty$$

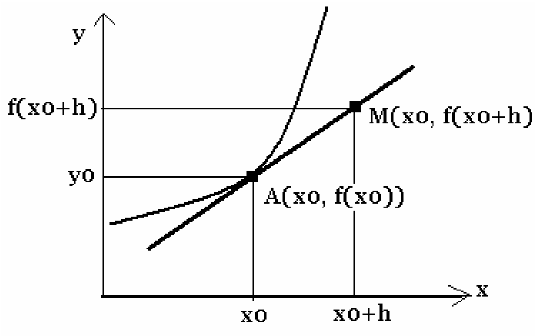
et une dérivée à droite si = $f'_d(x_0)$ et à gauche si = $f'_g(x_0)$

La fonction dérivée est une nouvelle application de I dans R.

<u>Dérivées successives</u>

Si f est dérivable sur I, elle admet elle-même une dérivée appelée *« dérivée seconde »* ou y'' ou f'' . Propriété généralisable à l'ordre « *n* ».

<u>Graphique de la fonction et de sa dérivée</u>



Soit la fonction : $x \xrightarrow{f} f(x)$ dont la courbe représentative est « C ». Le *coefficient directeur* de la droite (AM) est donné par :

$$m = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{(yo+h) - yo}{f(xo+h) - f(xo)}$$

f a pour dérivée $f'(x_0)$ au point (x_0) est une expression équivalente à :

- position limite de la tangente AM quand M tend vers A
- tangente en A de la courbe (C), dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$

<u>Différentielle au point x_0</u>

C'est l'application linéaire tangente de R dans R, d'une fonction dérivable f en x_0, définie par : $h \longrightarrow f'(xo) \times h$. On confond généralement la fonction linéaire avec sa valeur au point *h*. La différentielle s'écrit (cf plus haut) : $\mathbf{d}f\mathbf{x_0}\,\mathbf{(h)} = \mathbf{f'x_0 \times h}$

<u>L'ensemble de toutes les différentielles</u> (passage de x_0 à x) correspondant aux valeurs de x pour lesquelles f est dérivable est appelé *différentielle de f, et noté* :

df ou dy si $y = f(x)$, et sa valeur s'écrit : $\mathbf{d}f = \mathbf{f'_{(x)} \times h}$

Il est possible d'adopter une autre notation en considérant la fonction y = f(x) = x.

Alors $f'(x) = 1$ et dy = h = dx, et la différentielle peut s'écrire :

$df = f'_x\, dx$ ou $dy = y'\, dx$, avec *dx la différentielle de x, laquelle ne dépend pas de x*

Il ressort ainsi que $df = f'_x\, dx$ ➔ $f'_x = (df/dx)$ ou que $dy = y'\, dx$ =➔ $y' = (dy/dx)$, soit que *la dérivée est le quotient des différentielles*.

Les dérivées successives seront alors notées :

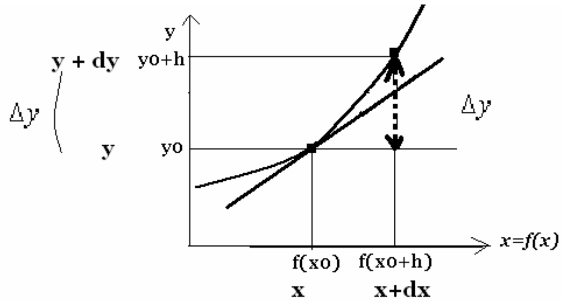
$(d^2y/dx^2), \ldots\ldots (d^ny/dx^n)$

Théorème de la valeur approchée et graphique de la différentielle

y = *f* (x) dérivable sur I ; *x* un point tel que $f'(x) \neq 0$ et *dx* un accroissement de x tel que (x+*dx*)EI

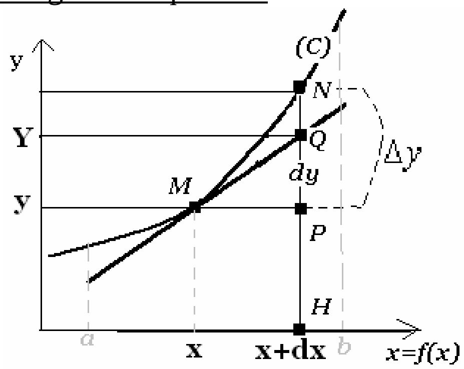
L'accroissement correspondant de *y* s'écrit : $\Delta y = f(x+dx) - f(x)$. On vérifie que :

$\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$ Lorsque la variation *dx* de *x* est infinitésimal, on peut prendre la différentielle *dy* de *y* pour une valeur approchée de l'accroissement Δ*y* subi par *y* lorsque *x* varie.



La variation (dx) de x entraîne deux accroissements consécutifs : Δ*y* et dy tel que la fonction y=f(x) permet de l'estimer. Leur valeur diffère. Le graphique montre que ce n'est que lorsque la variation *dx* de *x* est infinitésimale (en abscisse), que l'on peut prendre la différentielle *dy* de *y* pour une valeur approchée de l'accroissement Δ*y* subi par la fonction *y* lorsque *x* varie.

La démonstration géométrique est :



(C) est le graphique de la fonction y =*f*(x) dans un intervalle (a,b) où elle est dérivable en un point (M) d'abscisse (*x*). On définit un autre point (N), d'abscisse (x+*dx*). On représente les parallèles aux axes (*Ox*) et (*Oy*), passant par les points H,P,Q et N.

L'équation de la tangente en (M) ci-dessus, peut s'écrire $Y - y = f'_x (X - x)$. En appelant $X = x + dx$ et en notant Y le segment (HQ), et y le segment (HP), on peut écrire :

$Y - y = HQ - HP \Longrightarrow HQ - HP = f'_x\, dx$.

Or, $HQ - HP = PQ = dy$, et donc $HQ - HP = f'_x\, dx = PQ = dy$, soit : $f'_x\, dx = dy$

Comme $\Delta y = HN - HP = PN$, alors $\Delta y \neq dy$.

L'erreur commise par l'estimation de Δ*y* par *dy* diminue avec *dx*, donc à mesure que l'on se rapproche de M. Inversement l'erreur s'accroît, partant de M, avec l'ampleur de la variation Δ*y*.

exemples

Soit la fonction $y = (2x^2+3x) / (4x-2)$

Calcul de la différentielle $dy = y'\, dx$. On calcule d'abord la dérivée $y' = [u'v - uv']/v^2$, à laquelle on « ajoute » dx

$y' = (4x^2-4x-3)\, dx / [2\,(2x-1)]^2$

On montre que l'estimation par *dy* de Δy consécutif à une variation de x de 0,001 conduit à une erreur faible.
Les valeurs pour x = 1 sont : y = (5/2) = 2,5 et $dy = -3/4\ dx$
L'accroissement x = 0,001 s'écrit : dx = 1,001 – 1 = 0,001. En remplaçant dans
$dy = -3/4\ dx = -3/4 \times 0{,}001 = -0{,}00075$ on obtient une valeur approchée de *y* pour *x* = 1,001
$y = 2{,}5 - 0{,}00075 = 2{,}41925$..

<u>Soit la fonction $y = f(x)$ définie par : $y = u^2 + 2u - 1$ avec u = (x+1)/(x-1)</u>
Calcul de la dérivée $y' = f'(x)$
La dérivée peut être calculée en écriture différentielle sachant que $dy = y'$ dx
$dy = 2(u+1)\ du = 2[(x+1)/(x-1) + 1]du = ([(2x+2)/((x-1)] + [(2x-2)/(x-1)])\ du = 4x du / x-1$
calcul de $du = -2dx / (x-1)^2$, en remplaçant dans $dy = (4x/x-1) \times [-2dx/(x-1)^2] = -8x dx /(x-1)^3$. On en déduit la dérivée $y' = dy/dx = -8x /(x-1)^3$
Ces deux exemples permettent de constater qu'il est équivalent d'adopter pour expression de la dérivée

Soit : $(dy/dx) = -8x /(x-1)^3$	dans l'exemple 1	$= (4x^2-4x-3) / 2\ (2x-1)^2$
Soit : $dy = [-8x /(x-1)^3]\ dx$	dans l'exemple 1	$= (4x^2-4x-3)\ dx / 2\ (2x-1)^2$

Dérivée d'une fonction composée
Soit h =g(x) et z = h(y)
La composée $f(x) = h(y) = h(g(x))$
Si $y=g(x) = x^2$ et $z = h(y) = 2y+3$ la composée $f(x) = h(y) = h(g(x)) = 2x^2+3$
Règle de dérivation d'une fonction composée ou de la chaîne :
Pour f(x) = h(g(x)) la dérivée : $df(x)/dx = dh(y)/dy \times dg(x)/dx$. Appliquée à l'exemple :
$dh(y)/dy = 2$ et $dg(x)/dx = 2x$ et donc $df(x)/dx = 2 \times 2x = 4x$ c'est-à-dire la dérivée de $2x^2+3$

<u>Généralités sur les fonctions</u>

1) Monotonie

Une fonction monotone est soit toujours croissante, soit toujours décroissante
(NB : synonymie entre *fonction* et *transformation*)

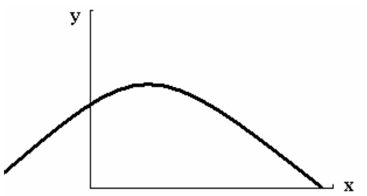
2) Continuité

Une fonction continue est tracée *« sans lever le crayon »*.
Il y a au moins 4 définitions, dont 3 sont équivalentes. La définition 1, de la continuité en un point : Si *f*(x) au voisinage « E » d'un point x_0

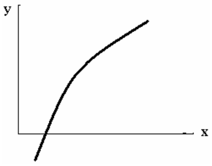
a) admet une limite en x_0
b) et si $\lim(x \rightarrow x_0) f(x) = f(x_0) = f(x \rightarrow x_0)$ (*lim*x)

C'est le cas des fonctions :
Constante : $y = f(x) = k$
Polynomiale : $y = ax^n + bx + c$ avec a et b les coefficients du polynôme, l'exposant *n*, ou degrés du polynôme
Rationnelle : $y = P_1/P_2$ ou rapport de deux polynômes
Linéaire : $y = ax + b$ avec $a > 0$ ou $a<0$, , $y'=a$, $y'' = 0$
Quadratique : $y = x - (\theta/2)\ x^2$, $y' = 1 - \theta x$, $y'' = -\theta < 0$

Exemple : $y = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2$, si $\theta<0$ le graph est :

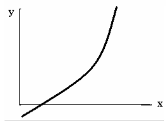


Logarithme : $y = ln(x)$, $y' = (1/x)$ et $y'' = - 1/x^2$



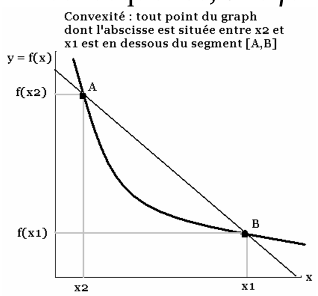
Exponentielle négative

$y = - e^{-\theta x}$ $\quad y' = \theta\, e^{-\theta x}$ $\quad y'' = -\theta^2\, e^{\theta x}$



3) Convexité : Théorème et corollaire

Soit *f, une fonction réelle d'une variable réelle,* définie sur un intervalle I de R, de classe C^1 (dérivable deux fois), on dira que :
-f convexe ⇔ f' croissante ⇔ f'' > 0
-f concave ⇔ f' décroissante ⇔ f'' < 0
Démonstration : La condition nécessaire est *f convexe si et seulement si son graph Γ est situé au-dessus de toute <u>tangente</u> à Γ*, soit :
Qque soit x, $x_0 \in I$ $f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0)$ ou $x_2, x_1 \in I$ $f(x_2) \geq f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f'(x_1)$ (la convexité stricte correspond à la stricte inégalité (« > »).
En conséquence, *une fonction convexe est une fonction dont l'épigraphe est convexe, soit :*



La pente de la tangente augmente de gauche à droite, soit : *f'' > 0*

Lorsque *f* est une fonction à plusieurs variables *f(.)* (par exemple 2), le raisonnement est appliqué à *l'espace « S »*. L'intervalle I est remplacé par une *partie ou espace convexe*. Les points considérés (x1, x2 etc…) sont remplacés par des *vecteurs* (X1,X2…). Les conditions à appliquer aux dérivées premières et secondes sont identiques, soit :
f'(X*) = 0 (annulation du système des dérivées partielles ou *« gradient »* pour l'existence d'un extremum)
f'' = vecteur des dérivées partielles secondes (<0 pour un minimum ou >0 un maximum)

Lorsque l'on étudie le système des courbes d'indifférence dans l'espace (*U,x,y*), ou celui des isoquants dans l'espace (Q,K,L) on cherche à vérifier la *concavité de la colline de satisfaction* (ou de la carte des isoquants). On vérifie alors en général simplement que le *gradient est nul pour des valeurs* x, y et λ du Lagrangien. Ce qui revient à vérifier la condition du premier ordre.

PRINCIPALES RÈGLES DE DÉRIVATION:

● **Règles de base :**

$y = C^{te}$	$\frac{dy}{dx} = 0$
$y = x$	$\frac{dy}{dx} = 1$
$y = x^n$	$\frac{dy}{dx} = n \,.\, x^{n-1}$
$y = u \,.\, v$ (*u* et *v* : fonctions de x)	$\frac{dy}{dx} = u \,.\, v' + u' \,.\, v$
$y = v_1 \,.\, v_2 \,.\, v_3 \,.\, \ldots \,.\, v_n$ (nombre fini de fonctions de x)	$\frac{dy}{dx} = v_1' \,.\, (v_2 \,.\, v_3 \,.\, \ldots \,.\, v_n) +$ $v_2' \,.\, (v_1 \,.\, v_3 \,.\, \ldots \,.\, v_n) + \ldots$
$y = C^{te} \,.\, u$	$\frac{dy}{dx} = C^{te} \,.\, u'$
$y = u + v - w$	$\frac{dy}{dx} = u_x' + v_x' - w_x'$
$y = u^n$	$\frac{dy}{dx} = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u'$
$y = u^v$	$\frac{dy}{dx} = v.u^{v-1}.u' + v'.u^v .\ln u$
$y = \frac{u}{v}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{-u \,.\, v'}{v^2} + \frac{u'}{v} = \frac{v \,.\, u' - u \,.\, v'}{v^2}$
$y = \frac{K}{v}$ (K : constante)	$\frac{dy}{dx} = - \frac{K \,.\, v'}{v^2}$
$y = \ln x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$
$y = e^x$	$\frac{dy}{dx} = e^x$
$y = n^x$	$\frac{dy}{dx} = n^x \,.\, \ln(n)$
$y = \ln u$	$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u}$
$y = e^v$	$\frac{dy}{dx} = e^v \,.\, v'$
$y = n^u$	$\frac{dy}{dx} = n^u \,.\, \ln(n) \,.\, u'$
$y = log_{10}\, u$	$\frac{dy}{dx} = log_{10}\, e \,.\, \frac{u'}{u} = 0{,}4343 \,.\, \frac{u'}{u}$

● Dérivées logarithmiques :

$$y = u\,.\,v\,.\,w \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}$$

$$y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

● Fonctions de fonctions :

$$y = f(u) \qquad \text{et} \qquad u = \Phi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\,.\,\Phi'(x)$$

● Fonctions réciproques :

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad x = \Phi(y)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\Phi'(x)}$$

quand deux fonctions sont réciproques,
leurs dérivées sont l'inverse l'une de l'autre.

● $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$.

Exemples : ● $x^2 \times x^4 = x^6$.

● $x^{-3} \times x^2 = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

● $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Exemples : ● $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

● $\sqrt[5]{x} = x^{1/5}$.

● $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$.

Exemples : ● $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$.

● $\sqrt[5]{x^{-3}} = x^{-3/5} = \dfrac{1}{x^{3/5}}$.

⑥ $\sqrt[n]{x} = a \Leftrightarrow x^{1/n} = a \Rightarrow x = a^n$.

Exemples : • $\sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x^{1/3} = 2 \Rightarrow x = 2^3 = 8$.

• $\sqrt[3]{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^{2/3} = 3 \Rightarrow x^2 = 3^3 = 27 \Rightarrow x = \sqrt{27}$.

⑦ $x^n = a \Rightarrow x = a^{1/n}$.

Exemples : • $x^n = 9 \Rightarrow x = 9^{1/n}$.

• $x^4 = 16 \Rightarrow x = 16^{1/4} = 2$.

⑧ $x^n = a^m \Rightarrow x = a^{m/n} \Leftrightarrow x = (a^m)^{1/n} \Leftrightarrow x = (a^{1/n})^m$.

Exemples : • $x^2 = 4^3 \Rightarrow x = 4^{3/2} \Leftrightarrow x = (4^{1/2})^3 = (2)^3 = 8$.

• $x^3 = 2^4 \Rightarrow x = 2^{4/3} \Leftrightarrow x = (2^4)^{1/3} = (16)^{1/3}$.

Ⅱ LES DÉTERMINANTS :

① Le déterminant d'ordre 2 :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$$

② Le déterminant d'ordre 3 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 1 \times (4) - 2 \times (8 - 1) + 3 \times (- 1)$

$= - 13.$

(III) DÉRIVÉES PARTIELLES ET DIFFÉRENTIELLE TOTALE :

(1) Cas d'une fonction à une variable : $y = f(x_1)$:

(a) La dérivée :

La dérivée de y par rapport à x_1 est : $f'x_1 = \dfrac{\delta y}{\delta x_1}$.

Exemples : • Si $y = 3x_1$, $f'x_1 = \dfrac{\delta y}{\delta x_1} = 3$.

• Si $y = 2x_1^3 - 4$, $f'x_1 = \dfrac{\delta y}{\delta x_1} = 6x_1^2$.

(b) La différentielle totale de y :

La différentielle totale de y s'écrit : $dy = f'x_1\, dx_1$.

Exemples : • Si $y = 3x_1$, $f'x_1 = 3$ et $dy = 3dx_1$.

• Si $y = 2x_1^3 - 4$, $f'x_1 = 6x_1^2$ et $dy = 6x_1^2\, dx_1$.

(2) Cas d'une fonction à deux variables : $y = f(x_1,x_2)$:

(a) Les dérivées partielles :

La dérivée partielle de y par rapport à x_1 est : $f'x_1 = \dfrac{\delta y}{\delta x_1}$.

La dérivée partielle de y par rapport à x_2 est : $f'x_2 = \dfrac{\delta y}{\delta x_2}$.

Donc une fonction à deux variables admet deux dérivées partielles.

Exemples : • Si $y = 3x_1 - 2x_2^2$, les dérivées partielles sont :

$f'x_1 = \dfrac{\delta y}{\delta x_1} = 3,$

$f'x_2 = \dfrac{\delta y}{\delta x_2} = - 4x_2.$

● Si $y = 3 \text{ Log } x_1 + x_2^2 - x_1x_2$,
les dérivées partielles sont :

$$f'x_1 = \frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{3}{x_1} - x_2,$$

$$f'x_2 = \frac{\delta y}{\delta x_2} = 2x_2 - x_1.$$

(b) <u>La différentielle totale de y :</u>

La différentielle totale de y s'écrit : $dy = f'x_1\, dx_1 + f'x_2\, dx_2$.

Exemples : ● Si $y = 3x_1 - 2x_2^2$,

$dy = 3dx_1 - 4x_2dx_2$.

● Si $y = 3 \text{ Log } x_1 + x_2^2 - x_1x_2$,

$$dy = \left(\frac{3}{x_1} - x_2\right) dx_1 + \left(2x_2 - x_1\right) dx_2.$$

3 Généralisation :

Si y est une fonction à n variables, alors :

(a) <u>Les dérivées partielles sont :</u>

$f'x_1,\ f'x_2,\ \ldots,\ f'x_n$.

(b) <u>La différentielle totale de y s'écrit :</u>

$$dy = f'x_1\, dx_1 + f'x_2\, dx_2 + f'x_3\, dx_3 + \ldots + f'x_n\, dx_n.$$

Exemple : ● si $y = 3x_1^2 - x_1x_3 + x_2^2x_3$,
la différentielle totale de y s'écrit :

$$dy = f'x_1\, dx_1 + f'x_2\, dx_2 + f'x_3\, dx_3 \quad (1),$$

$$(1) \iff dy = (6x_1 - x_3)\, dx_1 + (2x_2\, x_3)\, dx_2 + (-x_1 + x_2^2)\, dx_3.$$

IV DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE 2 :

1 Cas d'une fonction à une variable : $y = f(x_1)$:

La dérivée seconde (ou d'ordre 2) de y par rapport à x_1 est :

$f''x_1x_1 = \frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_1}$.

Exemples :

- Si $y = 7\,x_1 - 5$,

  la dérivée de y par rapport à x_1 est : $f'x_1 = \frac{\delta y}{\delta x_1} = 7$,

  la dérivée seconde de y par rapport à x_1 est :

  $f''x_1x_1 = \frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_1} = 0$ (on dérive la dérivée $f'x_1$ encore une fois par rapport à x_1).

- Si $y = 8x_1^3 + 6$,

  la dérivée de y par rapport à x_1 est :

  $f'x_1 = \frac{\delta y}{\delta x_1} = 24x_1^2$,

  la dérivée seconde de y par rapport à x_1 est :

  $f''x_1x_1 = \frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_1} = 48x_1$.

② Cas d'une fonction à deux variables : $y = f(x_1, x_2)$:

Dans le cas d'une fonction à deux variables, la dérivée partielle d'ordre 2 s'écrit :

$f''x_ix_j = \frac{\delta^2 y}{\delta x_i\ \delta x_j}$ (avec i = j ou i ≠ j).

Cela signifie que l'on dérive d'abord par rapport à x_i, puis que l'on dérive par rapport à x_j.

Exemples :

- $y = 3x_1^2 - 4x_1x_2$.

  Les dérivées partielles d'ordre 2 de y sont :

  - $\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_1} = 6$ car $\frac{\delta y}{\delta x_1} = 6x_1 - 4x_2$,
  - $\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2} = -4$ car $\frac{\delta y}{\delta x_1} = 6x_1 - 4x_2$,
  - $\frac{\delta^2 y}{\delta x_2 \delta x_2} = 0$ car $\frac{\delta y}{\delta x_2} = -4x_1$,
  - $\frac{\delta^2 y}{\delta x_2 \delta x_1} = -4$ car $\frac{\delta y}{\delta x_2} = -4x_1$.

- $y = x_1 - x_1^3x_2 - \text{Log}\ x_2$.

  Les dérivées partielles d'ordre 2 de y sont :

  - $\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_1} = -6x_1x_2$ car $\frac{\delta y}{\delta x_1} = 1 - 3x_1^2x_2$,
  - $\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2} = -3x_1^2$ car $\frac{\delta y}{\delta x_1} = 1 - 3x_1^2x_2$,
  - $\frac{\delta^2 y}{\delta x_2 \delta x_1} = -3x_1^2$ car $\frac{\delta y}{\delta x_2} = -x_1^3 - \frac{1}{x_2}$,
  - $\frac{\delta^2 y}{\delta x_2 \delta x_2} = \frac{1}{x_2^2}$ car $\frac{\delta y}{\delta x_2} = -x_1^3 - \frac{1}{x_2}$.

Kuhn et Tucker
(théorème de)

Théorème qui permet de déterminer les candidats à l'extremum d'une fonction dont les variables sont soumises à des contraintes sous forme d'inégalités. Ce théorème utilise les multiplicateurs de LAGRANGE comme dans le cas où les contraintes s'écrivent sous la forme d'égalités. Par conséquent, un point candidat à un extremum, X^*, annule les dérivées du lagrangien $L(\cdot)$ associé au programme ; soit :

$$L'_{x_j}(X^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

A ces conditions s'ajoutent les *relations d'exclusion* :

$$\lambda_i \cdot g_i(X^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, p,$$

qui signifient qu'au point candidat X^* soit la contrainte $g_i(X) \geq 0$ est saturée ($g_i(X^*) = 0$), soit le multiplicateur de Lagrange qui lui est associé est nul ($\lambda_i = 0$).

En outre, il découle du théorème de l'ENVELOPPE que lorsque l'extremum considéré est un *maximum*, alors les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte sont *positifs* ; si c'est un *minimum*, ils sont *négatifs*.

La *démonstration* du théorème de Kuhn et Tucker peut être faite en utilisant le théorème du lagrangien (où les contraintes s'écrivent sous la forme d'égalités). Pour cela, il suffit d'introduire des *variables d'écarts* z_i définies par les égalités $z_i^2 = g_i(X)$, ce qui permet de remplacer l'inégalité $g_i(X) \geq 0$ par l'égalité $g_i(X) - z_i^2 = 0$ $(i = 1, \ldots, p)$. Le lagrangien du programme s'écrit alors :

$$f(X) + \Sigma\lambda_i(g_i(X) - z_i^2),$$

de sorte que les conditions du premier ordre pour le « candidat » X^* (et Z^*) s'écrivent :

(1) $f'_{x_j}(X^*) + \Sigma\lambda_i(g_i)'_{x_j}(X^*) = 0, j = 1, \ldots, n$

(dérivées par rapport aux x)

(2) $-2\lambda_i z_i^* = 0, i = 1, \ldots, p$

(dérivées par rapport aux z).

Les conditions (1) sont les mêmes que dans le cas où les contraintes sont écrites sous la forme d'égalités ($L'_{x_j}(X^*) = 0, j = 1, \ldots, n$). Quant aux conditions (2), ce sont les relations d'exclusion, puisque par définition des variables d'écart z on a : $z_i^* = 0$ si et seulement si $g_i(X^*) = 0$.

La méthode d'optimisation des fonctions d'utilité et de production par le multiplicateur de Lagrange est appliquée en cours. On se limite à l'écriture du Lagrangien, et à la vérification simple de l'existence d'un optimum (maximum ou minimum).

On trouvera néanmoins ci-dessous les principaux fondements mathématiques de cette méthode.

Lagrange (multiplicateurs de) et **lagrangien**

Nombres associés aux contraintes subies par les variables d'une fonction et qui permettent de déterminer les extremums de cette fonction lorsque ses variables sont soumises à ces contraintes en utilisant une présentation semblable à celle qui est faite dans le cas d'un extremum dont les variables sont « libres » (non liées).

En effet, pour trouver les candidats à un extremum d'une fonction $f(\cdot)$ de CLASSE C^1, on annule ses dérivées partielles ; si les variables $x_1, \ldots, x_n$ de cette fonction sont soumises aux p contraintes : $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, \ldots, p$, alors la recherche de ses extremums sous contraintes se fait en annulant les dérivées partielles de la fonction :

$$L(\cdot) = f(\cdot) + \lambda_1 g_1(\cdot) + \ldots + \lambda_p g_p(\cdot).$$

Cette fonction est appelée *lagrangien* du programme étudié, le nombre λ_i étant le *multiplicateur de Lagrange* associé à la i-ème contrainte.

A l'origine des multiplicateurs de Lagrange, il y a le *théorème des fonctions* IMPLICITES. En effet, si l'on considère le programme qui consiste à rechercher les extremums de la fonction :

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

dont les variables sont soumises à la contrainte :

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

alors on peut considérer que cette contrainte définit implicitement une des variables (disons x_n) en fonction des autres [soit : $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$], de sorte que le programme se ramène à la recherche des extremums de la fonction « sans contrainte » :

(1) $\quad f(x_1, ..., x_{n-1}, \varphi(x_1, ..., x_{n-1}))$.

Pour que $A = (a_1, ..., a_n)$ soit un extremum de cette fonction, il faut qu'il annule ses dérivées (par rapport à $x_1, ..., x_{n-1}$). La dérivée par rapport à $x_i (i = 1, ..., n-1)$ de (1) s'obtient par DÉRIVATION EN CHAÎNE ; elle est donnée par :

$f'_{x_i}(x_1,\ldots,x_{n-1},\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}))+f'_{x_n}(x_1,\ldots,x_{n-1},\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}))\cdot\varphi'_{x_i}(x_1,\ldots,x_{n-1})$.

Comme cette expression s'annule à l'extremum A, il s'ensuit qu'on a [en se rappelant que, par construction de $\varphi(\cdot)$, $a_n = \varphi(a_1, ..., a_{n-1})$] :

(2) $\varphi'_{x_i}(a_1,\ldots,a_{n-1}) = -\dfrac{f'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n)}{f'_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)}$,

à condition que $f'_{x_n}(a_1,\ldots,a_n) \neq 0$.

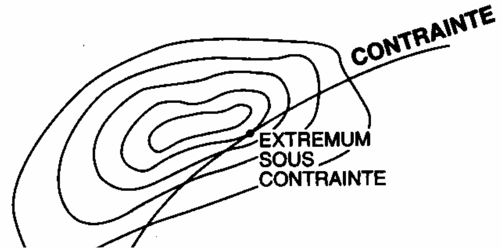
Or, comme par ailleurs la fonction $\varphi(\cdot)$ est définie implicitement par la contrainte $g(x_1, ..., x_n) = 0$, il découle du *théorème des fonctions implicites* que :

(3) $\varphi'_{x_i}(a_1,\ldots,a_{n-1}) = -\dfrac{g'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n)}{g'_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)}$.

De (2) et (3), il vient alors :

(4) $\dfrac{f'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n)}{f'_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)} = \dfrac{g'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n)}{g'_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)}$.

La relation (4), appliquée à $i = 1, ..., n-1$, donne les conditions du PREMIER ORDRE pour l'extremum d'une fonction dont les variables sont liées par une contrainte. Ce sont ces conditions qu'on retrouve par exemple dans le CHOIX DU CONSOMMATEUR en CONCURRENCE PARFAITE, choix qui consiste à égaliser les TAUX MARGINAUX DE SUBSTITUTION [rapports des dérivées partielles du type $\dfrac{f'_{x_i}(q_1,\ldots,q_n)}{f'_{x_n}(q_1,\ldots,q_n)}$] aux rapports des prix (dérivées de la contrainte budgétaire, avec ici $g(q_1, ..., q_n) = R - \Sigma p_i q_i$). Cette condition de base s'exprime « géométriquement » de la façon suivante : *en un point candidat à un extremum sous contraintes, la courbe de niveau de la fonction-objectif qui passe par ce point est tangente à la courbe qui représente la contrainte.*



C'est à ce stade qu'on introduit les multiplicateurs de Lagrange, qui permettent de présenter ce résultat sous une forme semblable à celle qu'il prend dans le cas où les variables ne sont pas soumises à des contraintes. Pour cela, on écrit (4) sous la forme :

(5) $\dfrac{f'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n)}{g'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n)} = \dfrac{f'_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)}{g'_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)}$

et l'on note $-\lambda$ ce rapport (qui ne dépend pas de i, puisque $\dfrac{f'_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)}{g'_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)}$ n'en dépend pas). De l'égalité :

$$\frac{f'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n)}{g'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n)} = -\lambda$$

il vient alors :

(6) $f'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n) + \lambda \cdot g'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n) = 0$,

égalité qui est vérifiée pour $i = 1, ..., n$. Or, si on pose :

$L(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) + \lambda \cdot g(x_1, ..., x_n)$,

alors la condition (6) s'écrit :

(7) $\quad L'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n) = 0$.

C'est le résultat annoncé pour $i = 1, ..., n$. On notera à son propos que :

— il est une *conséquence* de la *relation fondamentale* (« de tangence ») (4), et non sa « cause » (comme les manuels de microéconomie le donnent à croire) ;

— il est plus simple d'*écrire* (7) — qui a l'avantage de rappeler la condition du premier ordre d'un extremum sans contrainte — que (4), mais la recherche des points candidats A (les calculs que nécessite cette recherche) n'est pas forcément simplifiée par l'introduction du lagrangien, qui ajoute une inconnue (λ) supplémentaire au problème étudié ; souvent, cette résolution commence d'ailleurs par se faire en éliminant cette variable supplémentaire… ce qui ramène aux relations (4) !

— il se généralise aisément — toujours en appliquant le théorème des fonctions implicites — au cas où les variables sont soumises à p contraintes, les calculs étant évidemment plus lourds (voir *Les Mathématiques de la microéconomie*, de Bernard Guerrien et Isabelle This, Economica, Paris, 1996).

Ainsi, les multiplicateurs de Lagrange permettent de représenter d'une autre façon les conditions du premier ordre d'un problème d'extremum sous contraintes. Toutefois, et c'est là un point intéressant, ils peuvent aussi être interprétés en tant qu'indicateurs de l'« intensité de la contrainte » subie au point extremum, interprétation qui s'appuie sur le

Le théorème des fonctions implicites

Définition 1

Soit la fonction $y = f(x) = 3x^4$ *, de la forme* y = f(x). Elle est dite FONCTION EXPLICITE car la variable *y* est exprimée explicitement en fonction de la variable *x*.
Ecrite sous la forme $y - 3x^4 = 0$, la fonction explicite disparaît. On dit que la fonction $y = f(x) = 3x^4$ n'est alors définie qu' IMPLICITEMENT par l'équation $y - 3x = 0$.
La fonction $y = f(x)$ peut exister et n'être pas formellement connue. Donc la forme $y - 3x = 0$ ne s'y réfère qu'implictement.

Généralisation de la définition

Soit la fonction à deux variables $F(x,y) = 0$, définie dans un domaine $\mathcal{D}$ du plan (O,i,j). Si à chaque valeur de x dans un *intervalle* $[x_0 - h_0 , x_0 + h_0]$, on associe une unique valeur de y, telle que le couple (x,y) vérifie l'équation $F(.) = 0$, on définit alors une fonction $y = f(x)$ *pour laquelle l'égalité de l'équation* $F(x, \mathbf{y(x)}) = 0$ est réalisée *identiquement* dans l'intervalle. On dit que l'équation $F(x, y) = 0$ définit *une fonction implicite y de x.*

Le théorème des fonctions implicites ou théorème 1 (figure 1)

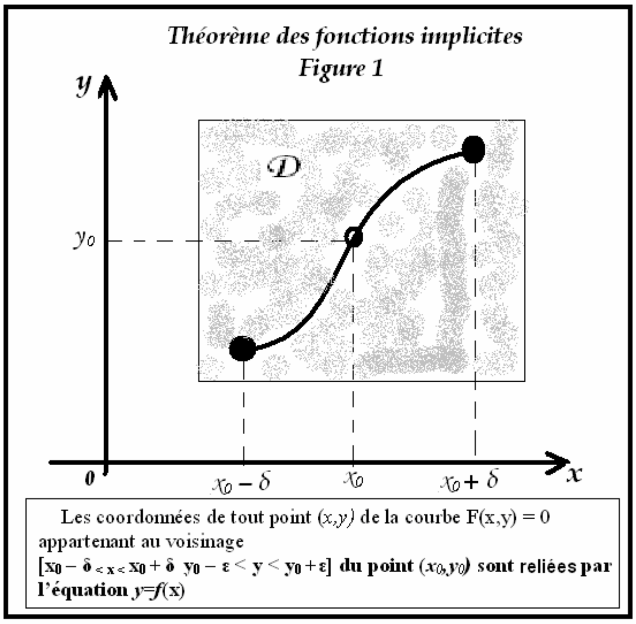
Soit $F(x,y) = 0$. On suppose que la fonction *F(x,y) vérifie 4 conditions* :
1) elle est définie et continue dans un rectangle centré en (x_0,y_0), soit :

$$\mathcal{D} = \{x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1,\ y_0 - \delta_2 < y < y_0 + \delta_2\}$$

2) *F(x,y) est nulle en* (x_0,y_0)
3) Les dérivées partielles $(\frac{\partial F}{\partial x}) et (\frac{\partial F}{\partial y})$ existent et sont continues dans le rectangle $\mathcal{D}$.
4) $(\frac{\partial F}{(x_0, y_0)}) / (\partial y) \neq 0$

Alors, pour tout ε suffisamment petit, on peut trouver un voisinage $]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[,\delta_0>0,$ du point x_0, tel qu'il existe une unique fonction continue $y = f(x)$, vérifiant la condition $|y - y_0| < \varepsilon$ prenant la valeur y_0 pour $x=x_0$, et transformant *l'équation F(x,y) en identité.*

Conclusion : *Le théorème des fonctions implicites donne donc des conditions suffisantes d'une unique solution en y de l'équation F(x,y) = 0 au voisinage d'un point x_0.*



OPTIMISATION *: les méthodes*

plan

Extremum libre et extremum lié ou contraint
ou optimisation sans contrainte (ou sans équation de liaison) et optimisation sous contrainte(ou avec équation de liaison)

Optimisation sans contrainte ou libre

Optimisation sous *p* contraintes égalité ou lié

Représentation du plan cartésien à trois dimensions : $z = f(x,y)$

Représentation sous la forme d'une surface ($z = x^2 + y^2$) ou paraboloïde de révolution [et distinction entre maximum libre et maximum lié)

Démonstration de la concavité ou de la convexité de $f(x,y)$

Deux théorèmes
La condition d'optimisation de Weierstrass
La formule de Taylor-Young (développements limités)

Optimisation d'une fonction « *f* » *réelle de n variables réelles sous* ***p*** *contraintes égalités* : Résumé

Optimisation sous contrainte *inégalité*

Optimisation sous *p* contraintes égalité (g_j) et *q* contraintes inégalité (f_k) : multiplicateurs de Lagrange (λ_i) et de Kuhn-Tucker (γ_j).

Approche simplifiée de l'optimisation

Extremum libre et extremum lié ou contraint
ou optimisation sans contrainte (ou sans équation de liaison) et optimisation sous contrainte(ou avec équation de liaison)

Optimisation sans contrainte ou libre

La fonction $f\ (\vec{x})$ est définie sur l'ensemble ouvert Ω de R^n. Elle peut être une fonction réelle de deux variables réelles, telle que $z=f(x_1, x_2)$. L'ensemble Ω est un *ouvert convexe* de R^n : $\forall x_1 \forall x_2 \in D, et \forall \lambda \in [0,1], alors \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in D$
Le programme est :
Max $f\ (\vec{x})$
$\vec{x} \in D$

Optimum local au point $(\vec{a}) \in D \cap \Omega$
Condition nécessaire 1 (ou CN1) : *gradf* $(\vec{a}) = 0$

⇔ Annulation du système des dérivées partielles premières (le *gradient de la fonction f au point M_0 est le vecteur dont les composantes sont les n dérivées partielles premières de f).*

➔ Recherche des points candidats (x_1,x_2) (ou $(\hat{x})$)

Condition nécessaire 2 (ou CN2 ou CNS – condition nécessaire et suffisante) : *f* étant de classe C^2 (différentiable) : Hess (*f*, $\vec{a}$)

Définie positive : > 0 ➔ minimum strict
Définie négative : < 0 ➔ maximum strict
avec Hess (*f*, $\vec{a}$) matrice des dérivées partielles secondes de *f*
son signe est donné par celui du déterminant Hessien en intégrant les candidats (Il est celui du polynôme caractéristique P(λ) = *det* $(H - I_n)$ avec I_n *la matrice identité d'ordre n*).

Optimum global : La fonction $f\ (\vec{x})$ étant *concave* ou *convexe* suivant le signe de Hess $(f, \vec{a})$,
La *condition suffisante* (ou *CS*) est : *gradf* $(\vec{a}) = 0$

Optimisation sous *p* contraintes égalité ou liées

Le programme est :
Max $f\ (\vec{x})$
$\vec{x} \in \Omega$
$\forall j = 1...p; g_j(\vec{x}) = 0$

Optimum local
Méthode 1 : remplacement ou substitution (transformation en problème d'optimisation sans contrainte).
Méthode 2 : Multiplicateur de Lagrange

Vérification des hypothèses :
$f, g_1, g_2 \ldots g_p$ de classe C^1, dérivables au voisinage de $(\vec{a})$
$gradg_1(\vec{a})$, $gradg_2(\vec{a})$ ….. $gradg_p(\vec{a})$ linéairement indépendants (condition dite de *qualification de qualification des contraintes*)

Ecriture du Lagrangien

$$L(\vec{x},\lambda_1,\lambda_2...\lambda_p) = f(\vec{a}) + \sum_j \lambda_j g_j(\vec{a})$$

CN1 : grad$f$ $(\vec{a}) + \sum_j \lambda_j gradg_j(\vec{a}) = (\vec{0})$

CN2 (ou CNS – condition nécessaire et suffisante) ($f,g_1..g_p$) de classe C^2 au voisinage de $(\vec{a})$

Si $\exists\lambda_1...\lambda_p / gradf(\vec{a}) + \sum_j \lambda_j gradg_j(\vec{a}) = (\vec{0})$

Et si $\forall h / gradg_j(\vec{a})(\vec{h}) = 0$

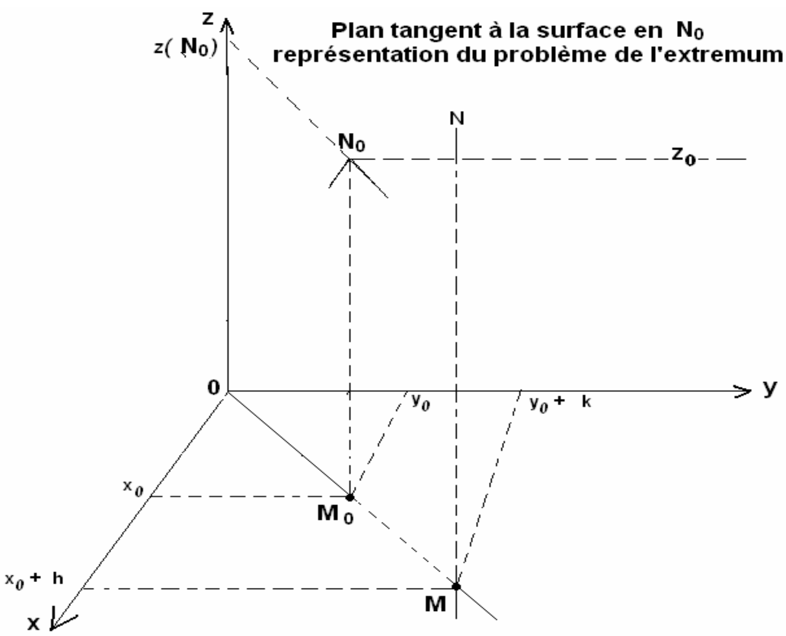
Hess (f, $\vec{a}$) + $\sum_j \lambda_j Hess(g_j, \vec{a})$ est de signe : (<0 max strict), (>0 min strict) (=0 pas de solution ou indéterminée).

Optimum global (f concave ou convexe)
f $(\vec{x})$ est définie sur l'ensemble ouvert Ω de R^n, est concave
Condition suffisante (CS)
Si $\forall j = 1....p, g_j affine$ (et condition de qualification des contraintes vérifiée)

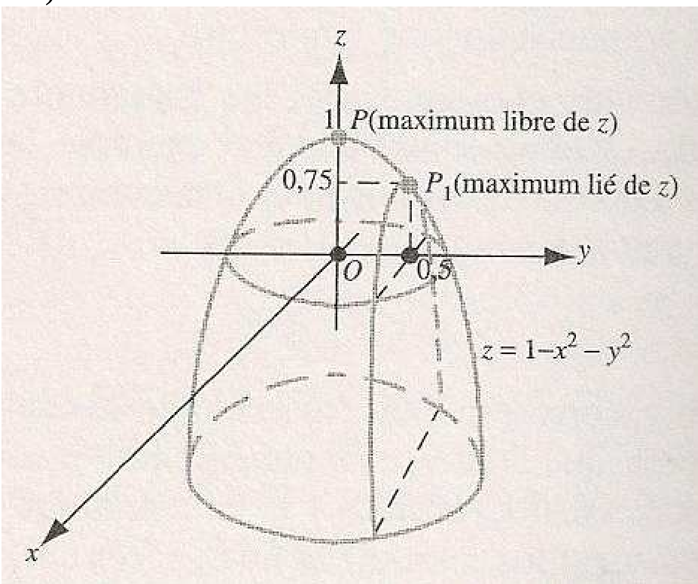
➔ $(\vec{a})$ est solution globale si : $\exists\lambda_1...\lambda_p / gradf(\vec{a}) + \sum_j \lambda_j gradg_j(\vec{a}) = (\vec{0})$

Représentation du plan cartésien à trois dimensions : $z = f(x,y)$

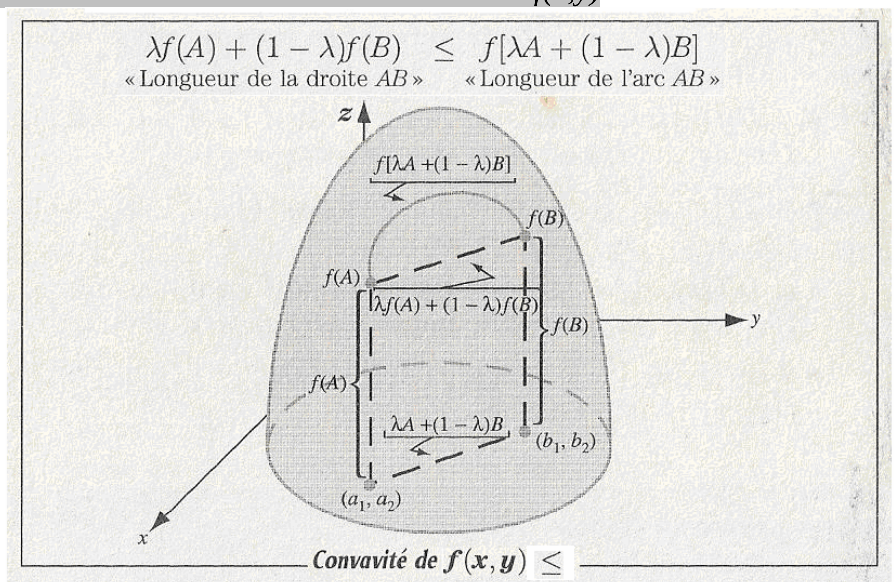
Equation générale du plan tangent : $(z – z_0) = f'_x (x,y).(x - x_0) + f'_y (x,y).(y – y_0)$
En écrivant la CN1, la condition d'un extremum : $f'_x (x,y) = f'_y (x,y) = 0$ au point N_0 ou M_0, on exprime l'existence du plan tangent : $z = z_0$.
La surface délimitée par le plan peut être située :
Sous N_0 : alors le point stationnaire M_0 est un *maximum*
Au-dessus de N_0 : alors le point stationnaire M_0 est un *minimum*
La CN1 peut n'être pas suffisante : il n'y a alors ni *minimum*, ni *maximum*. Le point correspondant est appelé *point selle ou point col*.



Représentation sous la forme d'une surface ($z = x^2 + y^2$) ou paraboloïde de révolution [et distinction entre maximum libre et maximum lié)
Soit $z = 1 - x^2 - y^2$ fonction représentée par le paraboloïde
On lit que Max z = 1, la cote maximale du paraboloïde
On suppose la contrainte $y = ½$
La fonction z prend la forme hyperbolique $z = 1 - x^2 - y^2 = 1 - (0.5)^2 - x^2 = -x^2 + 0.75$.
On lit que la projection de y = 0.5 dans la surface donne alors un maximum lié ou contraint au point P_1 (0,0.5,0.75). Le maximum lié est inférieur au maximum libre.



Démonstration de la concavité ou de la convexité de *f(x,y)*



Convexité............... ≥

La convexité ou la concavité stricte s'exprime par une *stricte inégalité (*soit *< ou >).*

Deux théorèmes

1- La condition d'optimisation de Weierstrass ou condition suffisante

Si *f* est continue sur un sous ensemble *compact* (donc fermé et borné) K de R^n, alors *f* atteint son *extremum* sur K.
Les candidats de la solution (point intérieur à K, ou points frontières δK) sont alors ceux qui donnent la plus grande valeur à *f*.

2- La formule de Taylor-Young (développements limités) : CN2 ou CNS condition nécessaire et suffisante

Elle permet d'étudier le signe de la différence déterminée par le plan tangent (ci-dessus) :

$$f(\mathrm{M}) - f(M_0)$$

Soit $f(x,y)$, de <u>classe C^2 définie sur l'ouvert convexe Ω</u> inclus dans R' *admettant un extremum* au point M (x_0+h, y_0+k) *au voisinage de* M_0, c'est le signe de l'expression :

$$f''_{xy}(x_0,y_0) - f''_{x^2}(x_0,y_0) \times f''_{y^2}(x_0,y_0) \text{ qui permet de conclure.}$$

La formule revient à l'application de la condition suffisante (CN2 ou CNS) donnée plus haut, soit : Hess (f, $\vec{a}$) dont le signe est donné par celui du déterminant Hessien.

Optimisation d'une fonction « *f* » *réelle de n variables réelles sous* ***p*** *contraintes égalités* :

<u>Résumé</u>

$f(x_1,x_2, \ldots x_n)$

$g_j(x_1,x_2, \ldots x_n)$ j = 1….p

optimum local

Méthode 1 : *substitution ou remplacement*

Soit $f(x,y)$ ➔ $y=\varphi(x)$ ➔ $f(x, \varphi(x))$➔ $h(x)$

CN1 : dérivées partielles premières = 0 ➔ le système est celui de trois équations à 3 inconnues dont λ. On trouve ainsi un Lagrangien.

CN2 ou CNS : Taylor Young

Méthode 2 : Lagrangien

Ecriture directe de L(x, y, λ)

CN1 : Hess (f,M_0) ➔ résolution du système et détermination des points candidats à l'optimum. La contrainte sous forme *saturée* appartient au système.

CN2 ou CNS : signe de *det* Hess (f,M_0), ou Taylor Young (signe de la différence f(M) – $f(M_0)$).

Optimum global : condition suffisante

f concave ou convexe

Ecriture du Lagrangien et application de la condition suffisante :

grad $L(x,y,\lambda) = 0$ (en intégrant les candidats)

NB : *si f concave ET g affine* ; le maximum est un maximum global *strict* sur Ω.

Optimisation sous contrainte *inégalité*

Définitions :

Contrainte saturée : $g_j(x_1,x_2, \ldots x_n)$ (j = 1….p) ≥ 0 ou $\leq 0 \Leftrightarrow g_j(x_1,x_2, \ldots x_n) = 0$

Contraintes régulières : gradients des contraintes aux points candidats ($\hat{x}$) *linéairement indépendants*.

Programme :

Extremum $f(x_1,x_2 \ldots x_n)$

Sc : $g_j(x_1,x_2, \ldots x_n) \geq 0$ pour (j = 1….p)

Optimum local

$\exists des réels \gamma_j \geq 0\_\forall j \in (1...p)\_et \gamma_j g_j(\hat{x}_{1...}..\hat{x}_n) = (\vec{0})$ Si :

$L = f(\hat{x}) + \Sigma\gamma_j g_j\_et\_gradL(\hat{x}_{1...}..\hat{x}_n) = (\vec{0})$ (autrement dit : *f admet un max local* et les *contraintes sont régulières*. *Les multiplicateurs* γ_j sont appelés *multiplicateurs de Kuhn-Tucker*.
Dans le cas d'un *minimum* local le signe *moins est substitué dans la formule au signe plus*, ou $\gamma_j \leq 0$).

Optimum global
1er cas : CS *maximum large global sur D*
f et g_j sont <u>linéaires</u> et définies sur l'ouvert Ω de R^n
Maximum large global sur D
1) $\forall j \in (1...p), \gamma_j \geq 0\_et \gamma_j g_j(\hat{x}_{1...}..\hat{x}_n) = (\vec{0})$
2) $L = f(\hat{x}) + \Sigma\gamma_j g_j\_et\_gradL(\hat{x}_{1...}..\hat{x}_n) = (\vec{0})$ (pour un *minimum* le signe est *moins* ou $\gamma_j \leq 0$).

2nd cas : CS *maximum large global sur D*
f et g_j sont <u>concaves</u> et définies sur l'ouvert Ω de R^n (➔ Lagrangien concave)
mêmes conditions pour le max.

3eme cas : CS *minimum large global sur D*
f <u>convexes</u> et g_j <u>concaves</u>, définies sur l'ouvert Ω de R^n
mêmes conditions pour le min.

Optimisation sous *p* contraintes égalité (g_j) et *q* contraintes inégalité (f_k) : multiplicateurs de Lagrange (λ_i) et de Kuhn-Tucker (γ_j).

Optimum Local
Les fonctions (objectif –*f*-, contraintes-g_j *et* f_k) sont définies et continûment dérivables sur l'ouvert Ω de R^n, au voisinage de $(\vec{a})$
Programme :

Max $f(\vec{x})$
$x \in D$ (D est défini par les *x* vérifiant les contraintes égalité et inégalité)
$\forall j \in (1...p), g_j(\vec{x}) = (\vec{0})$
$\forall k \in (1....q), f_k(\vec{x}) = (\vec{0})$

Les contraintes sont saturées. La condition de qualification des contraintes doit être vérifiée, soit : $gradg_j(\vec{a})\_et\_gradf_k(\vec{a}) = (\vec{0})\_indépendance\_linéaire$

Solution :
Il existe des réels ($\lambda_1 \ldots \lambda_p$) et ($\mu_1 \ldots \mu_q$) *satisfaisant aux trois conditions C1, C2, C3.*
La condition C1 est celle du Lagrangien qui s'écrit :
$L = L(\vec{x}, \lambda_1....\lambda_p, \mu_1...\mu_q) = f(\vec{x}) + \Sigma\lambda_j g_j(\vec{a}) + \Sigma\mu_k g_k(\vec{a})$, et qui doit vérifier
$gradf(\vec{x}) + \Sigma\lambda_j gradg_j(\vec{a}) + \Sigma\mu_k gradg_k(\vec{a}) = (\vec{0})$ (méthode identique à l'optimisation sous contrainte égalité)
Les conditions C2 et C3 sont celles de Kuhn-Tucker
C2 : $\forall k \in (1....q), \mu_k f_k(\vec{a}) = (\vec{0})$

C3 : $\forall k \in (1....q), \mu_k \leq 0 (Max) ou \geq 0 (Min)$

Optimum global (*f concave ou convexe* : condition suffisante)
Condition d'un *maximum* dans le cas *concave* :
Si *f définie sur l'ouvert convexe Ω* de R^n et $(\overline{a}) \in D$

f concave

f, $f_1, f_{2.....} f_q$ de classe C^1, dérivable au voisinage de $(\overline{a}) \in D$

$\forall j \in (1...p), g_j$ *affine* et condition de qualification vérifiée

$\forall k \in (1....q), f_k$ *convexe*

Solution :

1- condition de Slater vérifiée ou non : il
$\exists (\vec{y}) / \forall j \in (1...p), g_j(\vec{y}) = 0 \_et\_ \forall k = 1....q, f_k(\vec{y}) = 0$

2- $\forall j \in (1...p), g_j(\vec{a}) = 0$
$\forall k \in (1....q), f_k(\vec{a}) \leq 0 \_siMax\_ou \geq 0 \_siMin$

3- Alors $(\overline{a})$ est solution globale au problème si et seulement si
Il existe des réels ($\lambda_1 \ldots \lambda_p$) et ($\mu_1 \ldots \mu_q$) *satisfaisant aux trois conditions C1, C2, C3.*

Optimisation sous *p* contraintes égalité (g_j) et *q* contraintes inégalité (f_k) : multiplicateurs de Lagrange (λ_i) et de Kuhn-Tucker (γ_j). : *Résumé* (en modifiant les symboles)
f, la fonction objectif, h_i les contraintes égalité, et g_j les contraintes inégalité.

Optimum local
Conditions requises :
f continûment dérivable, et contraintes régulières au point $(\widehat{x})$.
Contraintes saturées et indépendance linéaire des $grad_{hi}$ et $grad_{gj}$

Solution :
Il existe des réels $\gamma_j = 1....n$ et λ_i = 1….q, tels que

1- $\forall j \in (1...p), \gamma_j \geq 0 \_et \gamma_j g_j(\widehat{x}_{1...}..\widehat{x}_n) = (\vec{0})$ (condition de Slater)

2- $L = L(\vec{x}, \lambda_1....\lambda_q, \gamma_1....\gamma_p) = f(\vec{x}) + \Sigma \gamma_j g_j(\widehat{x}) + \Sigma \lambda_i h_i(\widehat{x})$ et $gradL = gradL(\widehat{x}_1, \widehat{x}_n...\widehat{x}_n) = 0$

L'extremum est alors un maximum. Pour un Minimum le Lagrangien s'écrit (+ -).

Optimum global
Dans le cas d'un maximum la condition suffisante est :
F concave, h_i *linéaires,* g_j *concaves*

Approche simplifiée de l'optimisation

MINIMUM OU MAXIMUM ?

1 Cas d'une fonction à une variable : $y = f(x_1)$:

a) <u>Condition du 1er ordre ou condition nécessaire :</u>

La condition nécessaire pour que le point A (x_1^*, y_1^*) soit un optimum est qu'il vérifie : $f'x_1 = 0$.

b) <u>Condition du 2e ordre ou condition suffisante :</u>

Le point A, qui est un optimum, est :

(b1) Un minimum ssi : $f''x_1x_1 > 0$,

(b2) Un maximum ssi : $f''x_1x_1 < 0$.

Exemples :

- $y = 6x_1^2 - 12x_1 + 4$.

* A l'optimum on a : $f'x_1 = 0 \iff 12x_1 - 12 = 0$
$\Rightarrow x_1^* = 1$. Dans ces conditions : $y_1^* = -2$.

* De plus, $f''x_1x_1 = 12 > 0$,
donc le point A (1,-2) est un minimum.

- $y = x_1^3 - 7x_1^2 + 5$.

* A l'optimum on a : $f'x_1 = 0 \iff 3x_1^2 - 14x_1 = 0$ (1),

(1) $\Rightarrow x_1(3x_1 - 14) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0$ ou $x_1^* = \frac{14}{3}$.

On obtient donc deux optimums.

* De plus, $f''x_1x_1 = 6x_1 - 14$.

Au point B(0,5), $f''x_1x_1 = -14 < 0$,

le point B est donc un maximum.

Au point C $\left(\frac{14}{3}, - \frac{1237}{27}\right)$, $f''x_1x_1 = 14 > 0$,

le point C est donc un minimum.

2 Cas d'une fonction à deux variables : $y = f(x_1,x_2)$:

A *Sans contrainte :*

a Condition du 1er ordre ou condition nécessaire :

A l'optimum, on a : $\begin{cases} f'x_1 = 0 \\ f'x_2 = 0 \end{cases}$ (I).

Du système (I) on en déduit les extremums.

b Condition du 2e ordre ou condition suffisante :

Une condition suffisante pour qu'un extremum soit un maximum est : $f''x_1x_1 < 0$,

et $\begin{vmatrix} f''x_1x_1 & f''x_1x_2 \\ f''x_2x_1 & f''x_2x_2 \end{vmatrix} > 0$.

Une condition suffisante pour qu'un extremum soit un minimum est : $f''x_1x_1 > 0$,

et $\begin{vmatrix} f''x_1x_1 & f''x_1x_2 \\ f''x_2x_1 & f''x_2x_2 \end{vmatrix} > 0$.

Exemple : ● $y = f(x_1,x_2) = x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1^2$.

* A l'optimum, on a : $\begin{cases} f'x_1 = 0 \\ f'x_2 = 0 \end{cases}$ (I).

(I) <=> $\begin{cases} x_2 + 4x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 0 \end{cases}$.

Le point E ayant pour coordonnées : $x_1^* = x_2^* = 0$ est donc un extremum.

* De plus, $f''x_1x_1 = 4 > 0$,

et $\begin{vmatrix} f''x_1x_1 & f''x_2x_1 \\ f''x_2x_1 & f''x_2x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0$,

l'extremum trouvé est donc un minimum.

Ⓑ *Avec une contrainte :*

Dans ce cas, on utilise la méthode de Lagrange.
Soit donc à résoudre le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } f(x_1,x_2) \\ \text{sous la contrainte} \quad A = g(x_1,x_2). \end{cases}$$

Le lagrangien s'écrit :
$L = f(x_1,x_2) + \lambda\left(A - g(x_1,x_2)\right)$, λ étant le multiplicateur de Lagrange.

ⓐ Condition du 1^er^ ordre ou condition nécessaire :

A l'optimum, on a : $\begin{cases} L'x_1 = 0 \\ L'x_2 = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$ (II).

Du système (II) on en déduit les extremums.

ⓑ Condition du 2^e ordre ou condition suffisante :

On calcule le Hessien Bordé noté HB, avec :

$$HB = \begin{vmatrix} L''_{x_1x_1} & L''_{x_1x_2} & L''_{x_1\lambda} \\ L''_{x_2x_1} & L''_{x_2x_2} & L''_{x_2\lambda} \\ L''_{\lambda x_1} & L''_{\lambda x_2} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}.$$

Et : HB est positif dans le cas d'un maximum,
HB est négatif dans le cas d'un minimum.

Exemple : soit à résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } f(x_1,x_2) = x_1^2.x_2 \\ \\ \text{sous la} \\ \text{contrainte} \qquad 2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Le lagrangien s'écrit :
$L = f(x_1,x_2) + \lambda\,(2 - x_1 - x_2)$, λ étant le multiplicateur de Lagrange.
D'où $L = x_1^2.x_2 + \lambda\,(2 - x_1 - x_2)$.

A l'optimum, on a :

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = 0 \\ L'_{\lambda} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1.x_2 - \lambda = 0 \\ x_1^2 - \lambda = 0 \\ 2 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1.x_2 = \lambda & (1) \\ x_1^2 = \lambda & (2) \\ 2 = x_1 + x_2 & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \iff \frac{2\,x_1.x_2}{x_1^2} = \frac{\lambda}{\lambda} \iff \frac{2\,x_2}{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 2x_2 \text{ (a).}$$

En remplaçant x_1 par l'expression (a) dans l'équation (3), on obtient :

$$(3) \iff 2 = 2x_2 + x_2 \Rightarrow x_2^* = \frac{2}{3}.$$

Dans ces conditions : (a) $\Rightarrow x_1^* = \frac{4}{3}$.

Le point F ayant pour coordonnées : $x_1^* = \frac{4}{3}$ et $x_2^* = \frac{2}{3}$ est donc un extremum.

Calculons le Hessien Bordé HB.

$$HB = \begin{vmatrix} L''x_1x_1 & L''x_1x_2 & L''x_1\lambda \\ L''x_2x_1 & L''x_2x_2 & L''x_2\lambda \\ L''\lambda x_1 & L''\lambda x_2 & L''\lambda\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_2 & 2x_1 & -1 \\ 2x_1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

d'où $HB = 2x_2(-1) - 2x_1(-1) - 1\,(-2x_1) = -\,2x_2 + 4x_1$.

Au point $F\left(x_1^* = \frac{4}{3}\ ,\ x_2^* = \frac{2}{3}\right)$, $HB = 4 > 0$.

Le point F est donc un maximum.

Bibliographie

- **Bernard DUPONT : Algèbre pour les sciences économiques – Armand Colin – 1991,1997**

- **Olivier FERRIER : Maths pour les économistes – l'analyse en économie – Volume 1 et 2 – De Boeck – 2003**

- **N. HAYEK– JP LECAS : Mathématiques pour l'économie – Dunod – 2011**

- **F. ROURE , A-M CHARLES : Mathématiques pour les sciences sociales – Tome 2 : *« convexes – optimisation »*- - PUF – 1971**

- **A. BUTERY : *ibid.* Tome 4 : « *Intégration, processus continus* ».**

- **Stéphane ROSSIGNOL : « Mathématiques en économie-gestion » - Ed DUNOD - 2015**

Ξ